



Geometría

Radmila Bulajich Manfrino
José Antonio Gómez Ortega

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM.

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

www.elsolucionario.org

free online eBooks and Solutions Manual
can be found at www.elsolucionario.org

Contenido

Introducción	v
1 Geometría plana elemental	1
1.1 Elementos básicos	1
1.2 Congruencia de triángulos	5
1.3 Dos hechos fundamentales sobre triángulos	8
1.4 Semejanza de triángulos	13
1.4.1 Teorema de Thales	13
1.4.2 Semejanza de triángulos	18
1.5 Teorema de Pitágoras	22
1.5.1 Recíproco del teorema de Pitágoras	24
1.5.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras	25
1.6 Puntos y rectas importantes del triángulo	29
1.6.1 Las medianas	29
1.6.2 Las bisectrices	30
1.6.3 Las mediatrices	32
1.6.4 Las alturas	33
1.7 Angulos en la circunferencia	34
1.7.1 Angulos inscritos	34
1.7.2 Angulos semi-inscritos	39
1.8 Cuadriláteros	40
1.9 Construcciones y lugares geométricos	44
1.9.1 Construcciones básicas	45
1.9.2 Lugares geométricos	50
1.10 Ejercicios	60

2	Geometría del triángulo	65
2.1	La Recta de Euler y la circunferencia de los nueve puntos	65
2.2	Teoremas de Ceva y Menelao	70
2.3	Medianas y alturas	80
2.4	Incírculo y excírculos	86
2.5	Trigonometría	89
2.6	Fórmulas del área de un triángulo	97
2.7	Algunas desigualdades geométricas	98
2.8	Ejercicios	103
3	Geometría del círculo	107
3.1	Homotecia y similitud	107
3.1.1	Homotecia	107
3.1.2	Similitud	114
3.2	Potencia	118
3.3	Inversión	124
3.4	Cuadriláteros	133
3.4.1	Cuadriláteros cíclicos	136
3.4.2	Área de un cuadrilátero cíclico	143
3.4.3	Otros cuadriláteros de interés	147
3.5	Construcciones con regla y compás	150
3.6	Ejercicios	156
4	Problemas	163
4.1	Enunciados de los problemas	163
4.2	Sugerencias a los problemas	174
	Bibliografía	182
	Índice	185

Introducción

Este libro básicamente está dirigido a todos aquellos estudiantes que quieran prepararse en geometría para los concursos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, así como para los profesores que se dedican a preparar a dichos alumnos. Sin embargo, el hecho de que sea una recopilación de resultados de geometría lo convierte en una obra de consulta para estudiantes de matemáticas.

Este trabajo intenta llenar un vacío que existe en nuestro país de libros de preparación para las olimpiadas de matemáticas. Por ahora contamos principalmente con libros de recopilaciones de problemas planteados en olimpiadas anteriores estatales, nacionales o internacionales, los cuales hemos utilizado para extraer y puntualizar las herramientas principales que los concursantes deben conocer. Así, el libro contiene los resultados teóricos de geometría necesarios para poder abordar esencialmente los problemas de geometría plana que aparecen en los concursos de la olimpiada con un mínimo de garantías, además de contener una buena cantidad de problemas tipo de diversos niveles. Estos están presentados en ejemplos, ejercicios y problemas.

En el capítulo 1 se presenta lo que consideramos son los resultados básicos de geometría plana: los hechos fundamentales característicos de los triángulos, las circunferencias y los cuadriláteros. Son centrales los teoremas de Thales y Pitágoras, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos y el teorema de la media del ángulo inscrito. Damos las construcciones con regla y compás elementales. Describimos y analizamos los lugares geométricos más comunes. Este capítulo es un complemento magnífico para los cursos de geometría del último año de secundaria y el primer año del bachillerato.

En el segundo capítulo se hace un estudio más profundo y detallado de la geometría de los triángulos. Este capítulo inicia mostrando uno de los resultados clásicos del triángulo, que relaciona diversos elementos del mismo: la recta de Euler y la circunferencia de los nueve puntos. La segunda sección contiene los teoremas de Ceva y Menelao, herramientas útiles para trabajar problemas de concurrencia y colinealidad. En el capítulo se analizan algunas propiedades más de los puntos y rectas notables del triángulo. Se dan los elementos más

básicos de trigonometría, se definen las funciones trigonométricas elementales, y se demuestran las leyes de los senos y de los cosenos. Por último, en la penúltima sección, se deducen algunas fórmulas para el área de un triángulo. El capítulo tercero está dedicado al estudio de la geometría del círculo. Los conceptos de potencia e inversión son tratados con especial cuidado, buscando resaltar su utilidad para resolver problemas. Hemos incluido una sección de cuadriláteros, tema recurrente en los concursos, en especial los cuadriláteros cíclicos, de los que damos sus principales propiedades. Hay también una sección de construcciones con regla y compás donde ejemplificamos el uso de varios de los resultados presentados en el libro.

La última sección de cada uno de los tres primeros capítulos, contiene una lista de ejercicios relacionados con los temas tratados en el capítulo correspondiente, por lo general son consecuencia inmediata de los resultados presentados en el mismo.

Por último, el capítulo 4 está dividido en dos secciones: la primera contiene una recopilación de problemas que darán al estudiante la oportunidad de practicar y utilizar los conocimientos adquiridos a través de la lectura del presente volumen. Estos problemas son una buena muestra de los que aparecen en los concursos estatales y nacionales de nuestra olimpiada. En la segunda sección se dan sugerencias para enfrentar estos problemas. Una recomendación que nunca sobra y siempre hacemos al lector, es que intente resolver los problemas antes de consultar la sección de sugerencias.

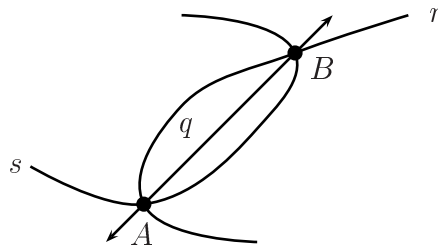
Como complemento de este libro se ha preparado el Libro de Ejercicios y Problemas, donde se dan sugerencias primero y después soluciones de los ejercicios de cada uno de los tres primeros capítulos. También incluye la solución de los problemas que aparecen en el capítulo 4. Las soluciones presentadas no son necesariamente las únicas o las mejores y sólo deben tomarse como una guía hacia el tipo de razonamiento que estos problemas buscan estimular.

Capítulo 1

Geometría plana elemental

1.1 Elementos básicos

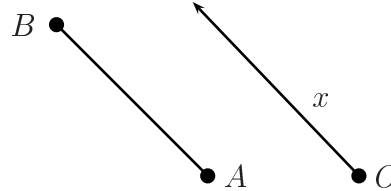
El inicio de un libro de geometría siempre enfrenta el dilema de qué es conocido y donde se debe empezar. Esto lo resolvemos suponiendo que el lector está familiarizado con conceptos básicos como punto, recta, plano, espacio, así como con las relaciones elementales entre ellos. Por ejemplo, asumimos que todo mundo está de acuerdo en que por dos puntos pasan cualquier número de líneas. Así, en la figura siguiente por A y B pasan las líneas q , r y s . Pero únicamente una línea recta pasa por ellos.



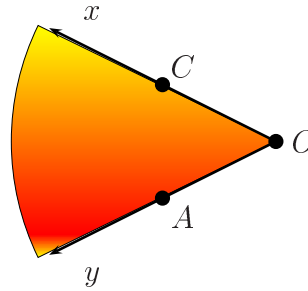
Una **línea recta** es la que está determinada por cualesquiera dos de sus puntos. En la figura anterior los puntos A y B determinan la línea recta q . Por simplicidad, de aquí en adelante a la línea recta le llamaremos únicamente recta. Las flechas indican que la recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones, esta propiedad la presentan siempre las rectas. Tenemos también

que una recta divide al plano en tres partes, la recta y dos semiplanos. Dados dos puntos A y B sobre una recta, al pedazo de recta comprendido entre estos dos puntos, incluyendo los puntos, le llamamos el **segmento** AB . De los semiplanos admitiremos que tienen la propiedad de que el segmento AB , determinado por dos puntos del semiplano, está completamente contenido en el mismo.

Cada punto O de una recta, divide a ésta en dos partes que llamamos **rayos**, con punto inicial O y los denotamos Ox . En la figura mostramos un segmento AB y un rayo Ox .

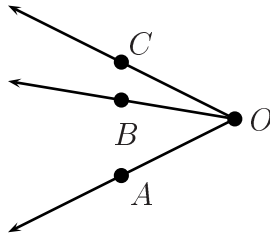


Definimos un **ángulo** como la parte común de dos semiplanos, el borde del ángulo lo forman dos rayos Ox , Oy , con un punto inicial común O . A este punto le llamamos **vértice**, y a los rayos **lados del ángulo**. Se muestra en la figura siguiente un ángulo



El ángulo que se muestra se denota como $\angle xOy$ o $\angle COA$, si C se encuentra sobre Ox y A sobre Oy . También diremos que es el ángulo entre los segmentos OC y OA .

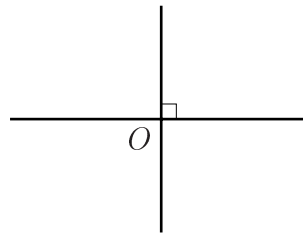
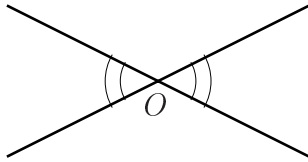
Si tres rayos OA , OB y OC tienen el vértice O en común, y el rayo OB está dentro del ángulo AOC entonces los ángulos AOB y BOC se llaman **ángulos adyacentes**. El ángulo AOC es la suma de los ángulos AOB y BOC .



Si los dos ángulos adyacentes son iguales, se dice que el rayo OB biseca al ángulo COA y OB se llama la **bisectriz del ángulo**.

Si se consideran dos rectas que se cortan en un punto O , quedan determinados cuatro ángulos. Los ángulos adyacentes suman 180° . Los pares de ángulos no consecutivos, se llaman **ángulos opuestos por el vértice** y claramente éstos son iguales.

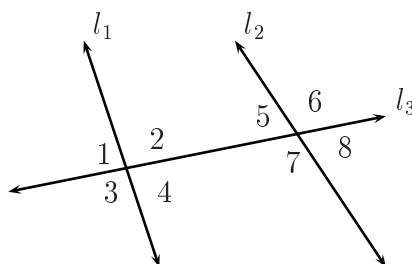
Cuando dos rectas se intersectan para formar 4 ángulos iguales, decimos que las rectas son **perpendiculares**, y los ángulos son **ángulos rectos** que miden 90° .



Un ángulo menor que un ángulo recto se llama **ángulo agudo** y uno mayor que un ángulo recto lo llamamos **ángulo obtuso**.

Llamamos a dos ángulos **complementarios** cuando su suma es 90° y **suplementarios** si su suma es de 180° .

Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del 1 al 8, como se muestra en la figura



Si la recta l_3 intersecta a las rectas l_1 y l_2 , decimos que es **transversal** a ellas. Los ángulos 2, 4, 5 y 7 están entre las rectas l_1 y l_2 , los llamamos **ángulos interiores**, los ángulos restantes los llamamos **ángulos exteriores**. Los ángulos en lados opuestos por la transversal l_3 se llaman **ángulos alternos**, como por ejemplo 3 y 5. A los ángulos 4 y 5 les llamamos **alternos internos** y los ángulos 3 y 6 son **alternos externos**. A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 y 7 los llamamos **ángulos correspondientes**. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son 3 y 7, 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6.

Cuando dos rectas no se intersectan decimos que son **paralelas**.

Asumiremos que cuando las rectas l_1 y l_2 son paralelas los ángulos correspondientes son iguales, es decir, $\{1, 4, 5, 8\}$ son iguales ó congruentes y $\{2, 3, 6, 7\}$ también son congruentes. Recíprocamente, si estas relaciones se cumplen, las rectas son paralelas. Luego, para demostrar que dos rectas son paralelas es necesario probar que un par de ángulos correspondientes son congruentes.

Por un punto A pasan un infinidad de rectas, dados dos puntos A y B determinan una recta y dados tres puntos A , B y C , éstos determinan una o tres rectas. Si los tres puntos están sobre una recta los llamamos **colineales**. Si los tres puntos no son colineales, forman un **triángulo** con las tres rectas que éstos determinan.

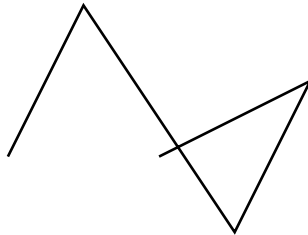
En general, tenemos que el segmento AB es igual al segmento BA . En algunos casos es necesario considerar segmentos dirigidos, es decir, dado un segmento AB le podemos asignar un sentido, por ejemplo de A a B , y decimos entonces, que el segmento AB es un **segmento dirigido**. Desde luego BA tendrá el sentido opuesto y lo señalamos así $BA = -AB$.

Definimos la **distancia** entre dos puntos A y B como la longitud del segmento de recta que los une. La **distancia** de un punto P a una recta l es la distancia entre P y el pie de la perpendicular trazada desde el punto P hasta la recta.

Una **circunferencia** es la figura que forman los puntos P tales que su distancia a un punto fijo O es igual a una constante r y la denotamos $\mathcal{C} = (O, r)$. O se llama el **centro de la circunferencia** y r el **radio de la circunferencia**.

1.2 Congruencia de triángulos

Una línea no recta, formada por segmentos se llama una **línea quebrada**.



Si los dos puntos extremos de una línea quebrada coinciden la figura que se obtiene es un **polígono**, la longitud de la recta quebrada se conoce como **perímetro**, los vértices de los ángulos formados por los segmentos de la recta quebrada son los **vértices del polígono**. Así, un polígono consta de un número finito de puntos llamados **vértices**, y un número igual de segmentos llamados **lados**. Los vértices se ordenan cíclicamente y, pedimos que no existan tres vértices sucesivos colineales y que los segmentos unan vértices consecutivos.

Si el polígono tiene n vértices y n lados diremos que es un **n -ágono**, con la idea de generalizar lo que conocemos como pentágono ($n = 5$), hexágono ($n = 6$), etc. Para el caso $n = 3$ y $n = 4$ en lugar de decir triángulo y tetragono, utilizamos triángulo y cuadrángulo o cuadrilátero.

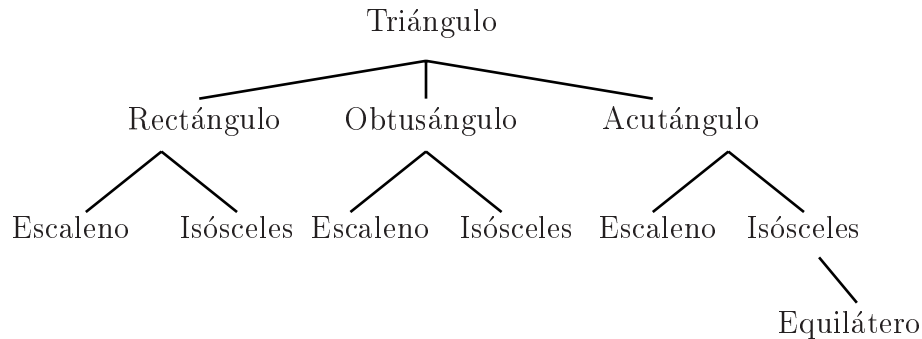
El polígono con lados que no se intersectan, divide al plano en dos regiones una infinita y una finita. La región finita se llama la superficie del polígono. Al caminar por el polígono en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj los ángulos de la izquierda se llaman **ángulos interiores** y los ángulos suplementarios a éstos se llaman **ángulos exteriores**. Una recta que une dos vértices no consecutivos del polígono se llama una **diagonal**.

Iniciamos estudiando los polígonos de tres lados y tres vértices, es decir, los **triángulos**. Estos se clasifican dependiendo del tipo de sus ángulos o bien de la comparación de sus lados. La clasificación de los distintos triángulos dependiendo de sus ángulos es: **triángulo rectángulo** el que tiene un ángulo recto; **triángulo acutángulo** el que tiene todos sus ángulos agudos;

triángulo obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso. Más adelante nos convenceremos de que éstas son las únicas posibilidades.

La clasificación de los triángulos dependiendo de sus lados es: **triángulo escaleno** con ningún par de lados iguales; **triángulo isósceles** con dos lados iguales; **triángulo equilátero** con todos sus lados iguales.

Un triángulo puede estar en más de una categoría, como se muestra en el siguiente diagrama:



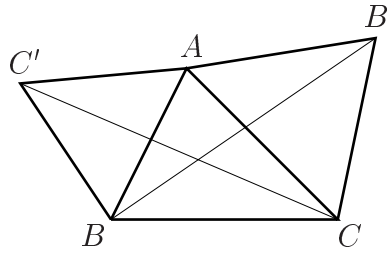
En un lenguaje coloquial decimos que dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. Así, tenemos que dos segmentos son congruentes si tienen exactamente la misma longitud; y que dos triángulos son **congruentes**, si tienen sus lados y sus ángulos correspondientes iguales. Más precisamente, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $CA = C'A'$, y los ángulos en A , B y C son iguales a los ángulos en A' , B' y C' .

El primer criterio de congruencia de triángulos nos dice que dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, son congruentes. A este criterio de congruencia se le llama **lado-ángulo-lado** y lo denotamos como **LAL**.

El segundo criterio de congruencia nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales son congruentes. A este criterio se le conoce como **ángulo-lado-ángulo** y lo denotamos como **ALA**.

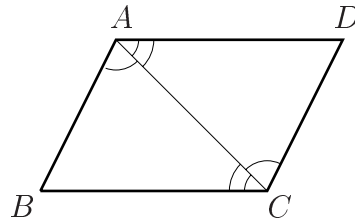
El tercer criterio de congruencia dice que si tenemos dos triángulos con tres lados iguales entonces son congruentes **lado-lado-lado** y lo denotamos **LLL**.

Ejemplo 1.2.1 Si sobre los lados AB y CA de un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros ABC' y CAB' , siempre se tiene que $BB' = CC'$.



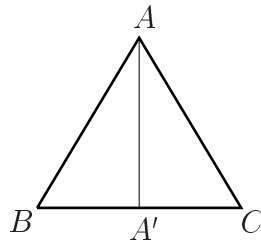
Notemos que en los triángulos BAB' y $C'AC$ se tiene que $BA = C'A$, $AB' = AC$ y $\angle BAB' = \angle BAC + 60^\circ = \angle C'AC$, luego por el criterio LAL , los triángulos son congruentes por lo que $BB' = CC'$.

Ejemplo 1.2.2 La diagonal AC del paralelogramo $ABCD$ divide a éste en dos triángulos congruentes.



En efecto, como AC es una transversal a las paralelas AD y BC se tiene que los ángulos alternos internos DAC y ACB son iguales. También, como AC corta a las paralelas AB y CD , son iguales los ángulos CAB y DCA . Finalmente como AC es un lado común a los triángulos ABC y CDA resulta, por el criterio ALA , que estos triángulos son congruentes.

Ejemplo 1.2.3 Si ABC es un triángulo isósceles con $AB = CA$ y si A' es el punto medio de BC , entonces los triángulos ABA' y ACA' son congruentes.



En efecto, los lados AB , BA' y $A'A$ del triángulo ABA' son congruentes respectivamente a los lados AC , CA' y $A'A$ del triángulo ACA' ; por el criterio LLL , los triángulos son congruentes.

Ejemplo 1.2.4 Si ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$ entonces sucede que $\angle ABC = \angle ACB$.

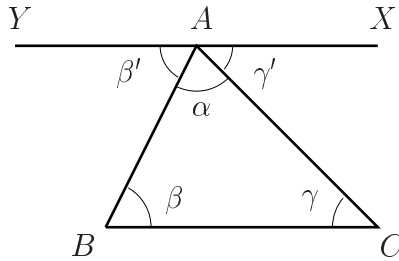
En efecto, consideramos el triángulo $A'B'C'$ donde $A' = A$, $B' = C$ y $C' = B$, esto es el triángulo ABC solamente que los vértices son recorridos en sentido opuesto. Entonces es claro que $A'B' = AC = AB$, $B'C' = CB = BC$ y $C'A' = BA = CA$. Por el criterio LLL , los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, luego $\angle ABC = \angle A'B'C' = \angle ACB$.

1.3 Dos hechos fundamentales sobre triángulos

En esta sección veremos los dos hechos fundamentales de los triángulos: uno se refiere a la suma de los ángulos internos de un triángulo y el otro nos dice qué propiedades deben de cumplir las longitudes de los segmentos para poder formar un triángulo. Esta segunda propiedad fundamental de los triángulos se conoce como la **desigualdad del triángulo**.

Teorema 1.3.1 (Suma de los ángulos de un triángulo) La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .

Demostración. Por el vértice A del triángulo ABC trazamos una recta paralela al lado BC .

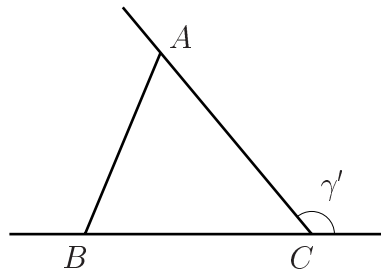


Entonces β y γ son iguales a los ángulos $\beta' = \angle YAB$ y $\gamma' = \angle XAC$, respectivamente, por ser alternos internos. Por lo tanto, $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ$.

Como un triángulo está formado por tres segmentos, es interesante también considerar los ángulos formados por las rectas que contienen a estos segmentos y son exteriores al triángulo.

Proposición 1.3.2 *En cualquier triángulo ABC tenemos que el ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.*

Demostración. Consideramos a γ' , el ángulo externo al vértice C .



Tenemos que $\gamma' + \angle ACB = 180^\circ$, por ser suplementarios. Por lo tanto, como la suma de los ángulos internos del triángulo también es 180° , tenemos:

$$\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = \gamma' + \angle ACB,$$

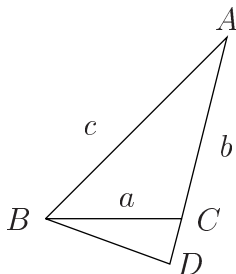
de donde,

$$\gamma' = \angle CBA + \angle BAC.$$

Antes de formular el segundo hecho fundamental, es decir, la relación que hay entre los segmentos que forman un triángulo, demostraremos el siguiente lema que se refiere a la relación que hay entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Lema 1.3.3 *En un triángulo, al lado mayor de cualesquiera dos lados se opone el ángulo mayor, es decir, si $AB > AC$ entonces $\angle ACB > \angle ABC$. El recíproco es también válido, es decir, el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.*

Demostración. Para demostrar la primera parte consideramos un triángulo ABC tal que $AB > AC$. Seleccionamos un punto D en la recta AC tal que $AD = AB$, entonces $AD > AC$.



Como $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$, tenemos que $\angle ABD > \angle ABC$. Por otro lado el $\angle ACB$ es ángulo exterior del triángulo BDC , luego $\angle ACB = \angle ADB + \angle CBD > \angle ADB$. Sin embargo, en el triángulo isósceles ABD se tiene que $\angle ABD = \angle ADB$ (ver ejemplo 1.2.4), por lo tanto, $\angle ACB > \angle ADB = \angle ABD > \angle ABC$.

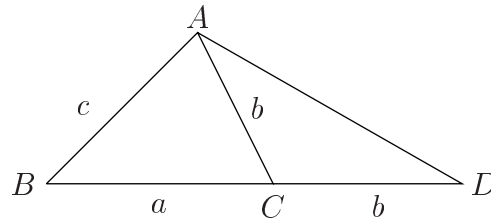
Para probar el recíproco, supongamos que $\angle ACB > \angle ABC$, tenemos tres posibilidades: a) $AB < AC$, b) $AB = AC$ y c) $AB > AC$.

Si a) fuera cierto, se deduce, de la primera parte del lema, que $\angle ACB < \angle ABC$, lo cual contradice la hipótesis. Si b) fuera cierto entonces tendríamos un triángulo isósceles, por el ejemplo 1.2.4, con $\angle ACB = \angle ABC$, lo cual es falso. Por lo tanto, la única posibilidad es c), es decir, $AB > AC$.

Teorema 1.3.4 (La desigualdad del triángulo) *Para cualquier triángulo tenemos que la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. Es decir, si llamamos a , b y c a las longitudes de los lados del triángulo, tenemos que las siguientes tres desigualdades se cumplen:*

$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Demostración. Sea D un punto sobre la prolongación del lado BC del triángulo ABC , tal que $AC = CD$, entonces $BD = BC + CD = a + b$.

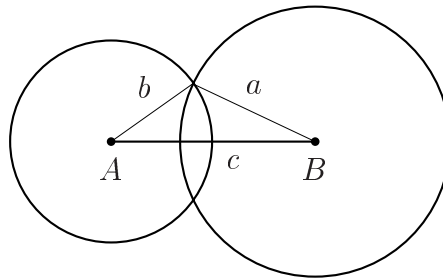


Como $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, tenemos que $\angle BAD > \angle CAD = \angle CDA$, la igualdad se debe a que el triángulo ACD es isósceles (ejemplo 1.2.4). Utilizando el lema anterior tenemos que $BD = a + b > c$. Análogamente se demuestran las otras desigualdades.

El recíproco también es cierto, es decir,

Teorema 1.3.5 *Si a, b y c son números positivos tales que $a + b > c$, $a + c > b$ y $c + b > a$, entonces existe un triángulo de lados a, b y c .*

Demostración. Lo que haremos es construir un triángulo con lados iguales a a, b y c . Podemos suponer que $a \leq b \leq c$. Consideramos un segmento AB de longitud c . Trazamos ahora dos circunferencias una con centro en A y radio b y otra con centro en B y radio a .

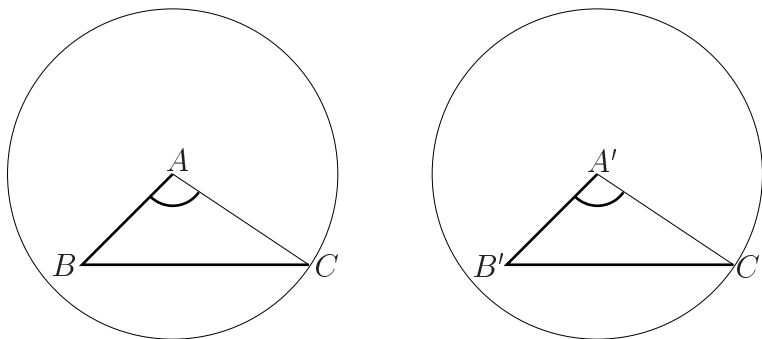


Ya que $c < a + b$, las dos circunferencias se intersectan (en caso contrario se tendría que $a + b \leq c$). Uno de los puntos de intersección sirve como el tercer vértice C , del triángulo buscado ABC .

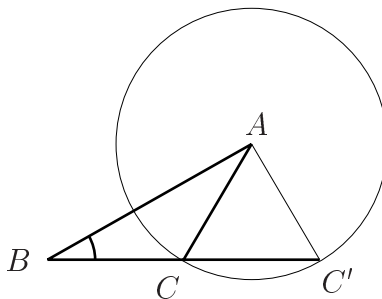
Veamos un ejemplo más de congruencia de triángulos:

Ejemplo 1.3.6 *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo opuesto al lado mayor de estos lados, respectivamente iguales, entonces son congruentes.*

Para convencernos de este hecho, consideramos los triángulos ABC con $AC > AB$ y $A'B'C'$ con $A'C' > A'B'$ y tales que $A'C' = AC$, $A'B' = AB$ y $\angle B = \angle B'$. Para comparar los restantes elementos transportamos el triángulo $A'B'C'$ sobre el triángulo ABC de modo que $A'B'$ coincida con AB . Debido a la igualdad de los ángulos en B' y en B la semirrecta BC coincide con la semirrecta $B'C'$. Los vértices C y C' resultan coincidentes, ya que, el vértice C está en la intersección de la circunferencia con centro en A y radio AC , y C' está en la intersección de la circunferencia con centro en A' que coincide con A y radio $A'C' = AC$.



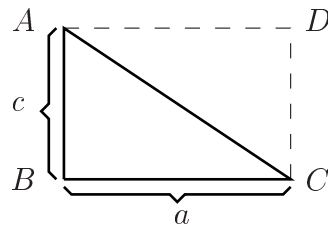
Observamos que, si el ángulo congruente entre los dos triángulos es el ángulo que se opone al menor lado, tenemos dos posibles triángulos que cumplen con esto. Para verlo, consideramos el lado $AB > AC$ y el ángulo en B fijo. Con centro en A trazamos la circunferencia de radio AC . Prolongamos el lado BC , éste corta a la circunferencia en dos puntos C y C' , sin embargo, los triángulos ABC y ABC' no son congruentes.



1.4 Semejanza de triángulos

1.4.1 Teorema de Thales

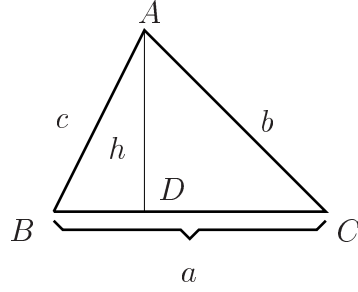
El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos. En efecto, con un triángulo rectángulo ABC de catetos AB y BC podemos formar un rectángulo $ABCD$ al trazar DC paralela a AB y DA paralela a BC . Es claro que CDA es congruente con ABC . El área del rectángulo es el producto de sus lados $AB \cdot BC$, por lo tanto, el área del triángulo rectángulo ABC es $\frac{AB \cdot BC}{2}$. De ahora en adelante, denotaremos el área de un triángulo XYZ como (XYZ) y, en general, denotaremos el área de cualquier polígono entre paréntesis.



Para generalizar la definición de área a un triángulo cualquiera necesitamos definir: la **altura** de un triángulo. La **altura** desde el vértice A es la perpendicular al lado opuesto BC que pasa por A y la denotamos por h_a . De manera similar se definen h_b y h_c las alturas por los vértices B y C . Al punto de intersección D , de la altura con BC , le llamamos el **pie de la altura**. La longitud de la altura que pasa por A para el triángulo ABC es la longitud del segmento AD . En muchas ocasiones es necesario considerar a la altura como toda la recta y no solamente como el segmento AD .

El área de cualquier triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases por la altura correspondiente sobre la base considerada. Veamos porqué: Supongamos que el triángulo es ABC y consideramos la altura desde el vértice A . Hay dos posibilidades para el pie de la altura D , que D se encuentre dentro del segmento BC o bien, que D esté en la prolongación de BC . Supongamos que los lados del triángulo tienen longitudes a , b y c y que la altura AD tiene longitud h .

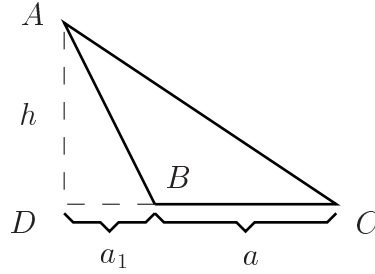
(1) Si D se encuentra entre B y C .



Claramente $(ABC) = (ABD) + (ADC)$, si $BD = a_1$ y $DC = a_2$ entonces

$$(ABC) = \frac{a_1 \cdot h}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2} = \frac{(a_1 + a_2) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

(2) Si D está fuera del segmento BC . Supongamos que B se encuentra entre D y C (el caso C entre B y D es análogo).



Si $BD = a_1$ y $DC = a_2$ entonces $a = a_2 - a_1$. Luego,

$$(ABC) = (ADC) - (ADB) = \frac{a_2 \cdot h}{2} - \frac{a_1 \cdot h}{2} = \frac{(a_2 - a_1) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Lema 1.4.1 Si dos triángulos tienen una misma altura entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón de las bases donde se levanta la altura común.

Demostración. El área de los triángulos (ABC) y (XYZ) está dada por:

$$(ABC) = \frac{BC \cdot h}{2} \quad \text{y} \quad (XYZ) = \frac{YZ \cdot h}{2},$$

donde h es la altura común. Así, la razón de sus áreas es

$$\frac{(ABC)}{(XYZ)} = \frac{\frac{BC \cdot h}{2}}{\frac{YZ \cdot h}{2}} = \frac{BC}{YZ}.$$

De igual manera se deduce el siguiente:

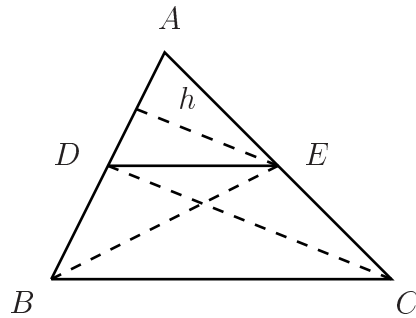
Lema 1.4.2 *Si dos triángulos tienen una base igual entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base igual.*

Veamos ahora el teorema fundamental de proporcionalidad:

Teorema 1.4.3 (Primer teorema de Thales) *En el triángulo ABC , sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralela a BC . Entonces*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Demostración. Consideramos el triángulo ABC y DE una recta paralela a la base.



Observamos que los triángulos ABE y ADE tienen la misma altura desde el vértice E . Luego, la razón de sus bases es igual a la razón de sus áreas, así:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{(ABE)}{(ADE)}. \quad (1.2)$$

Análogamente, al considerar los triángulos ADC y ADE , tenemos que:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{(ADC)}{(ADE)}. \quad (1.3)$$

Observamos que los triángulos DEB y DEC tienen a DE como base común; y como DE y BC son paralelos, las respectivas alturas sobre esta base miden lo mismo, luego: $(DBE) = (DCE)$. Por lo tanto, $(ABE) = (ADE) +$

$(DBE) = (ADE) + (DCE) = (ADC)$. Esta identidad junto con (1.2) y (1.3), nos lleva a que: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

El recíproco del teorema anterior también es cierto, es decir,

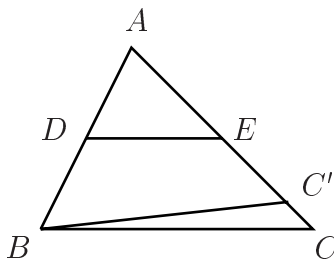
Teorema 1.4.4 *Si en el triángulo ABC tenemos puntos D y E sobre los lados AB y AC respectivamente, tales que*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

entonces DE es paralela a BC .

Demostración. Supongamos que DE no es paralela a BC . Sea BC' la recta que pasa por B paralela a DE y supongamos que intersecta a AC en C' . Por el teorema anterior tenemos que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}.$$



Como por hipótesis

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

tenemos que

$$\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE}.$$

Por lo tanto, $AC' = AC$ y entonces $C' = C$.

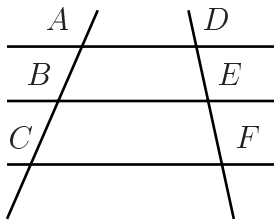
Observamos que la relación $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ del teorema anterior es equivalente a $\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$, que es equivalente a

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}.$$

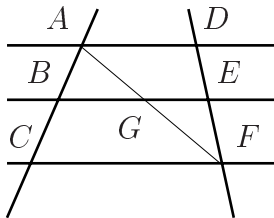
Esto es, si tenemos dos rectas paralelas, la proporción que hay entre las rectas transversales que las cortan se conserva, sin importar quienes son estas rectas transversales.

El siguiente teorema es consecuencia inmediata del teorema fundamental de proporcionalidad o primer teorema de Thales.

Teorema 1.4.5 (Segundo teorema de Thales) *Consideremos tres rectas y dos rectas transversales a éstas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD , BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD , BE o CF son paralelas entonces las tres rectas son paralelas.*



Demostración. Consideramos la transversal AF a las tres rectas AD , BE y CF y llamamos G al punto de intersección de AF con BE .



Tenemos, aplicando la observación del teorema anterior a los triángulos ACF y FAD , que las rectas AD , BE y CF son paralelas si y sólo si

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF} \quad \text{y} \quad \frac{FG}{GA} = \frac{FE}{ED}.$$

Luego, son paralelas si y sólo si $\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$.

Ahora, supongamos que BE y CF son paralelas y que la otra recta AD cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Sea G el punto de intersección de AF con BE . Como

BE y CF son paralelas, $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$. Ahora bien, como $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ tenemos que, $\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF}$. Luego, por el primer teorema de Thales, GE y por lo tanto BE es paralela a AD .

1.4.2 Semejanza de triángulos

Diremos que dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son **semejantes**, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle A'B'C' \\ \angle ACB &= \angle A'C'B' \\ \angle BAC &= \angle B'A'C'\end{aligned}$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

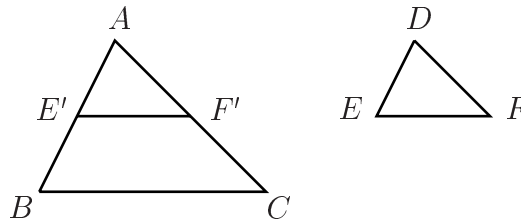
La definición de semejanza exige dos cosas: (1) los ángulos correspondientes deben ser iguales, y (2) los lados correspondientes deben ser proporcionales. En los siguientes teoremas mostraremos que si se cumple una de las condiciones también se cumple la otra. Estas observaciones se presentan en los teoremas de semejanza **ángulo-ángulo-ángulo** y **lado-lado-lado** que se denotan como **AAA** y **LLL** respectivamente.

Teorema 1.4.6 (Teorema de semejanza AAA) . *Si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces sus lados correspondiente son proporcionales y los triángulos son semejantes.*

Demostración. Sean ABC y DEF dos triángulos con ángulos correspondientes iguales, tenemos que demostrar que:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF}.$$

Demostraremos la primera igualdad, la segunda es análoga.



Sean E' y F' dos puntos en AB y AC respectivamente, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por el criterio de congruencia LAL , tenemos que los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes. Por lo tanto, $\angle AE'F' = \angle DEF$. Como $\angle DEF = \angle ABC$ entonces $\angle AE'F' = \angle ABC$. Luego $E'F'$ y BC son paralelas. Por el teorema 1.4.3, tenemos que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como $AE' = DE$ y $AF' = DF$, resulta que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

como queríamos demostrar.

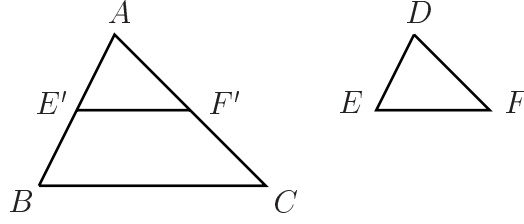
Una consecuencia del teorema anterior y del hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° es: Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y DEF son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como **AA**.

Teorema 1.4.7 (Teorema de semejanza LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos es igual, entonces son semejantes.*

Demostración. Consideramos dos triángulos ABC y DEF tales que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{y} \quad \angle BAC = \angle EDF,$$

demostraremos que son semejantes.



Sean E' y F' los puntos sobre el lado AB y AC tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Por el criterio de congruencia LAL , tenemos que los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes.

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

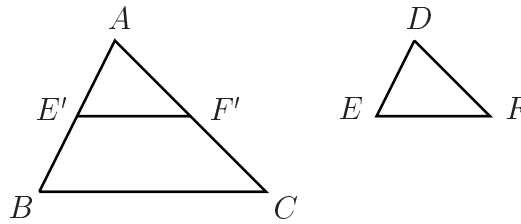
Del teorema fundamental de proporcionalidad, tenemos que $E'F'$ es paralelo a BC , luego, los ángulos ABC y $AE'F'$ son iguales y, como por hipótesis tienen el ángulo en A igual, tenemos que los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes (semejanza AA). Como los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes, entonces ABC y DEF son semejantes, como se quería demostrar.

Teorema 1.4.8 (Teorema de semejanza LLL) *Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales entonces los triángulos son semejantes.*

Demostración. Sean ABC y DEF dos triángulos que cumplen:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}. \quad (1.4)$$

Sean E' y F' los puntos en AB y AC respectivamente, tales que $DE = AE'$ y $DF = AF'$. Sustituyendo en la ecuación (1.4) tenemos que $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Como los triángulos ABC y $AE'F'$ comparten el ángulo en A , por el teorema de semejanza LAL , los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes.



Por definición de semejanza $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$, de donde, $E'F' = BC \frac{AE'}{AB}$ ya que $AE' = DE$. De la ecuación (1.4) tenemos que: $EF = BC \frac{DE}{AB}$, luego, $EF = E'F'$. Por el criterio de congruencia *LLL*, los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes, y los triángulos ABC y DEF son semejantes, como se quería.

Ejemplo 1.4.9 Si tenemos dos triángulos ABC y DEF con:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}, \quad AB > AC, \quad DE > DF \quad \text{y} \quad \angle BCA = \angle EFD$$

entonces son semejantes.

Sea E' un punto en AB , tal que $DE = AE'$. Trazamos por E' la paralela a BC que corta a AC en F' . Por el teorema de Thales los triángulos ABC y $AE'F'$ son semejantes, luego,

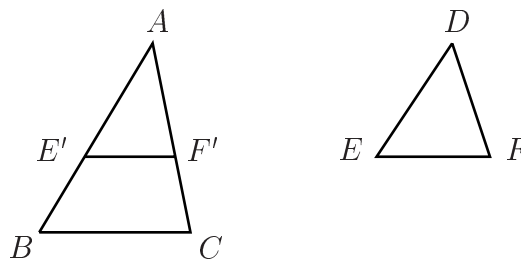
$$\frac{AB}{AE'} = \frac{BC}{E'F'} = \frac{AC}{AF'}. \quad (1.5)$$

Además, por hipótesis

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (1.6)$$

y como $AE' = DE$ (por construcción), entonces, de las ecuaciones (1.5) y (1.6), tenemos que

$$AF' = DF. \quad (1.7)$$

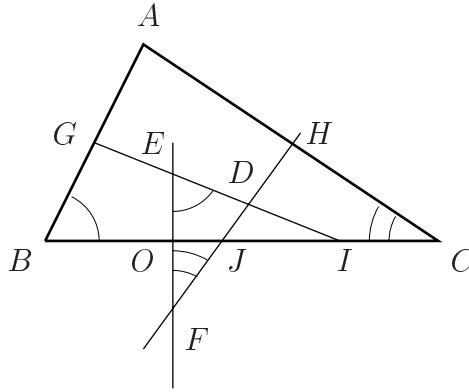


Comparando los triángulos $AE'F'$ y DEF tenemos que $AE' = DE$ por construcción y $DF = AF'$ por la ecuación (1.7). Por el ejemplo 1.3.6, como $\angle E'F'A = \angle BCA = \angle EFD$ y $DE > EF$, los triángulos son congruentes. Por otro lado, tenemos que el triángulo $E'AF'$ es semejante al triángulo BAC , luego, los triángulos EDF , BAC son semejantes.

Ejemplo 1.4.10 Si ABC y DEF son triángulos, con AB , BC y CA perpendiculares a las rectas DE , EF y FD respectivamente, entonces los triángulos son semejantes.

En la figura tenemos que los triángulos rectángulos BGI y EOI son semejantes por tener el ángulo en I común y un ángulo recto (criterio de semejanza AA), luego

$$\angle ABC = \angle IEO. \quad (1.8)$$



Los triángulos rectángulos OJF y HJC son semejantes ya que $\angle OJF = \angle HJC$ por ser opuestos por el vértice, por lo tanto:

$$\angle OFJ = \angle HCJ = \angle ACB. \quad (1.9)$$

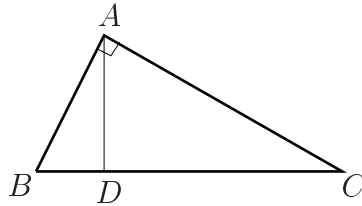
Por las ecuaciones (1.8) y (1.9) es inmediato concluir que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

1.5 Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se conoce como la **hipotenusa** y a los lados adyacentes al ángulo recto como los **catetos**, del triángulo.

Lema 1.5.1 *En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes a él.*

Demostración. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice A y sea AD la altura sobre la hipotenusa BC .



Tenemos que ABC es semejante a DBA ya que ambos son triángulos rectángulos y el ángulo en B es común; también los triángulos rectángulos ABC y DAC son semejantes, en éstos el ángulo en C es común.

Ahora podemos hacer algunas observaciones:

La semejanza entre los triángulos ABC y DBA , nos da que: $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{AB}$, por tanto,

$$AB^2 = DB \cdot CB. \quad (1.10)$$

La semejanza entre los triángulos ABC y DAC , nos da que: $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$, por tanto,

$$CA^2 = CD \cdot CB. \quad (1.11)$$

Al sumar (1.10) y (1.11), tenemos que:

$$AB^2 + CA^2 = DB \cdot CB + CD \cdot CB = (CD + DB) \cdot CB = CB^2.$$

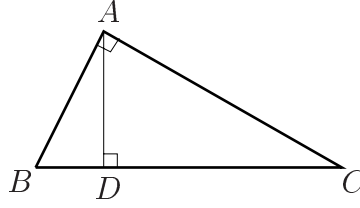
Esto se puede resumir en el siguiente,

Teorema 1.5.2 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Otra consecuencia del lema 1.5.1 es la siguiente:

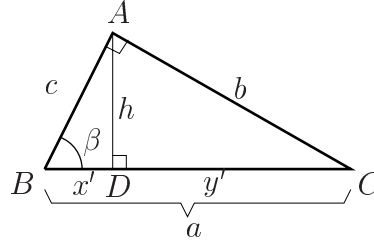
Proposición 1.5.3 *En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es la media proporcional de los dos segmentos en que se divide la hipotenusa por el pie de tal altura.*

Demostración. Sabemos que ABC es semejante tanto a DBA como a DAC , luego también son semejantes los triángulos rectángulos DBA y DAC . Esto implica que $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$, entonces $AD^2 = BD \cdot CD$.



Por lo tanto $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$ como se planteaba.

Ejemplo 1.5.4 Si b y c son los catetos de un triángulo rectángulo, a la hipotenusa y h la altura sobre a . Sean y' , x' las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa como se muestra en la figura. Entonces, a) $h^2 = x'y'$, b) $c^2 = ax'$, c) $b^2 = ay'$, d) $ah = cb$.



a) Este inciso es la proposición anterior.

b) Por ser los triángulos ABC y DBA semejantes se tiene que $\frac{c}{a} = \frac{x'}{c}$, luego $c^2 = ax'$.

Análogamente se demuestra c).

d) De los tres incisos anteriores tenemos que, $h^2 = x'y'$, $c^2 = ax'$ y $b^2 = ay'$, por lo tanto: $a^2 h^2 = (ax')(ay') = c^2 b^2$, de donde, $ah = cb$.

1.5.1 Recíproco del teorema de Pitágoras

Lema 1.5.5 Sea ABC un triángulo, con ángulos en B y C menores a 90° , y sea D el pie de la altura de A sobre BC . Si $AD^2 = BD \cdot DC$ entonces ABC es triángulo rectángulo.

Demostración. Trazamos la perpendicular a AB que pasa por A , ésta corta a la recta BC en un punto C' (si no fuera el caso, entonces tal recta es paralela a BC y resulta entonces que $B = D$, por lo que $AD^2 = BD \cdot DC$ sería falso).

Tenemos ahora que el triángulo ABC' es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A , por el corolario anterior, $AD^2 = BD \cdot DC'$. Por hipótesis también $AD^2 = BD \cdot DC$, por lo que al igualar y cancelar tenemos que $DC' = DC$ y entonces $C' = C$. Lo que muestra que ABC es triángulo rectángulo.

La condición de que el triángulo no tenga ángulos obtusos en B y C , obliga a que C' y C queden del mismo lado con respecto a D , entonces D se encuentra entre B y C .

Teorema 1.5.6 (Recíproco del teorema de Pitágoras) *Si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.*

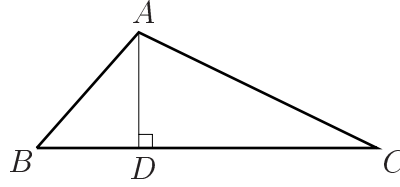
Demostración. Supongamos que ABC es un triángulo con $BC^2 = AB^2 + CA^2$. Notemos que como $BC > AB$ y $BC > CA$, los ángulos en B y C son menores a 90° . Sea D el pie de la perpendicular de A sobre BC . Los triángulos ABD y ADC son triángulos rectángulos con ángulo recto en D . Por el teorema (directo) de Pitágoras aplicado en éstos, tenemos: $AB^2 = BD^2 + AD^2$ y $CA^2 = AD^2 + DC^2$. Por lo tanto, $2AD^2 + BD^2 + DC^2 = AB^2 + CA^2 = BC^2 = (BD + DC)^2 = BD^2 + 2BD \cdot DC + DC^2$. Al reducir tenemos que $AD^2 = BD \cdot DC$, entonces, por el lema anterior, tenemos el resultado.

1.5.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Una primera aplicación del teorema de Pitágoras es la caracterización de las alturas de un triángulo ABC .

Lema 1.5.7 *Si ABC es un triángulo y AD es perpendicular a BC , se tiene que: $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.*

Demostración. Por el teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectángulos ABD y ADC se tiene: $AB^2 = AD^2 + DB^2$ y $AC^2 = AD^2 + DC^2$.



Por lo tanto, $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.

Proposición 1.5.8 *La altura por A es el conjunto de puntos P tales que: $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$.*

Demostración. Desde luego, si P se encuentra sobre la altura, por el lema anterior, $PB^2 - PC^2 = DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$.

Recíprocamente, si P cumple que: $PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$, entonces $PB^2 - PC^2 = DB^2 - DC^2$, donde D es el pie de la altura desde A. Ahora si D' es el pie de la perpendicular de P sobre BC, también tenemos que: $PB^2 - PC^2 = D'B^2 - D'C^2$. Por tanto, $DB^2 - DC^2 = D'B^2 - D'C^2 = (D'D + DB)^2 - (D'D + DC)^2$. Al desarrollar y cancelar llegamos a que $DD' = 0$, luego, $D = D'$, lo que garantiza que P se encuentra sobre la altura por A.

Hemos visto que en un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, se cumple que $BC^2 = AB^2 + CA^2$ y solamente en este caso. Cuando el ángulo en A del triángulo es agudo u obtuso no hay igualdad, sin embargo podemos decir algo sobre: $BC^2 - CA^2$.

Sea F el pie de la altura de C sobre AB, notemos que si el ángulo en A es agudo, el punto F se encuentra del mismo lado de B con respecto a A y si el ángulo en A es obtuso entonces F y B quedan en diferentes lados de A. Recíprocamente, dependiendo de si el pie de la perpendicular F de C cae del mismo lado de B o bien si B y F se encuentran en diferentes lados, el ángulo es agudo u obtuso. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos AFC y BCF, obtenemos:

$$CA^2 = AF^2 + FC^2 \quad y \quad BC^2 = FB^2 + FC^2.$$

Al tomar la diferencia tenemos:

$$BC^2 - CA^2 = FB^2 - AF^2$$

$$= \begin{cases} (AB - AF)^2 - AF^2 = AB^2 - 2AB \cdot AF, & \text{si } A \text{ es agudo} \\ (AB + AF)^2 - AF^2 = AB^2 + 2AB \cdot AF, & \text{si } A \text{ es obtuso.} \end{cases}$$

Es decir, obtenemos las siguientes identidades, donde F es el pie de la altura de C sobre AB :

$$\begin{array}{lll} \text{el ángulo } A \text{ es recto} & \text{si y sólo si} & BC^2 = AB^2 + CA^2, \\ \text{el ángulo } A \text{ es agudo} & \text{si y sólo si} & BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot AF, \\ \text{el ángulo } A \text{ es obtuso} & \text{si y sólo si} & BC^2 = AB^2 + CA^2 + 2AB \cdot AF. \end{array}$$

Resumiendo, tenemos que para un triángulo ABC el ángulo A es recto si y sólo si $BC^2 = AB^2 + CA^2$, el ángulo A es agudo si y sólo si $BC^2 < AB^2 + CA^2$ y el ángulo A es obtuso si y sólo si $BC^2 > AB^2 + CA^2$.

Ejemplo 1.5.9 Si a, b, c, d, e son cinco segmentos de manera que con cualesquiera tres de ellos es posible construir un triángulo, entonces al menos uno de los triángulos es acutángulo.

Supongamos que $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.

Para un triángulo de lados a, b y c se tiene que el ángulo que se opone al lado c es recto, agudo u obtuso de acuerdo a que c^2 sea igual, menor o mayor a $a^2 + b^2$.

Supongamos que los triángulos (a, b, c) y (c, d, e) no son acutángulos, entonces $c^2 \geq a^2 + b^2$ y $e^2 \geq c^2 + d^2$. Al sumar estas desigualdades y simplificar, tenemos: $e^2 \geq a^2 + b^2 + d^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$. Así,

$$e^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (a + b)^2,$$

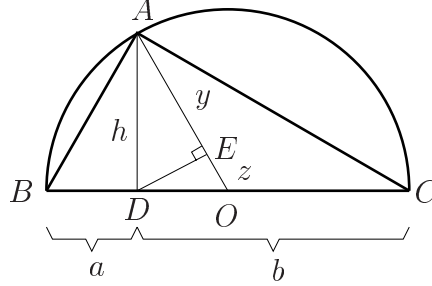
es decir, $a + b \leq e$, por lo que el triángulo de lados a, b, e no se puede construir, pero esto es una contradicción.

Ejemplo 1.5.10

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (1.12)$$

La primera expresión se conoce como la **media armónica**, la segunda es la **media geométrica**, la tercera **media aritmética** y la cuarta la **media cuadrática** de a y b .

Estas desigualdades se pueden demostrar geométicamente como sigue:
 Consideramos un semicírculo con radio $\frac{a+b}{2}$, denotemos con BC al diámetro y O su centro. Sea D un punto sobre BC de manera que $BD = a$ y $DC = b$. Sobre el semicírculo consideramos el punto A de manera que AD sea perpendicular a BC y sea E el pie de la perpendicular a AO trazada desde D , como se muestra en la figura.



Dado que el triángulo ABC es rectángulo¹ sabemos por el lema 1.5.1 que los triángulos DBA y DAC son semejantes y, por el ejemplo 1.5.4 inciso a), tenemos que $h^2 = ab$, es decir, que la altura del triángulo ABC es $h = \sqrt{ab}$, que claramente es menor o igual que su radio. Luego, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Para demostrar la primera desigualdad, observamos que los triángulos DAE y OAD son semejantes, entonces

$$\frac{h}{y} = \frac{y+z}{h}$$

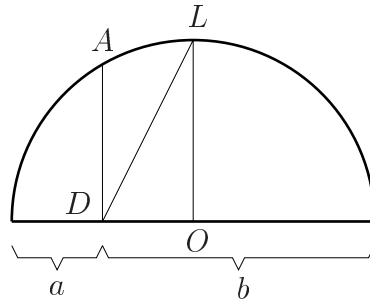
como $y + z$ es radio y $h^2 = ab$ tenemos que

$$\frac{2ab}{a+b} = y$$

es decir, y representa la media armónica. Claramente tenemos que $y \leq h$, luego $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

Para demostrar la última desigualdad geoméricamente, consideramos la siguiente figura

¹Esto se justificará más adelante, ver corolario 1.7.5.



Tenemos que $OD = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ y, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned} DL^2 &= OD^2 + OL^2 \\ DL^2 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ DL^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2}, \end{aligned}$$

es decir, $DL = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ que claramente es mayor que $\frac{a+b}{2}$.

1.6 Puntos y rectas importantes del triángulo

1.6.1 Las medianas

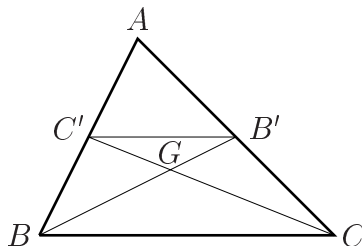
En un triángulo los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto se llaman **medianas**. Si A', B', C' son los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente, las medianas son AA', BB' y CC' .

Lema 1.6.1 *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de tal tercer lado.*

Demostración. Consideramos, en el triángulo ABC , los puntos medios B' y C' de los lados CA y AB respectivamente. Como $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$, tenemos, por el teorema de Tales, que $B'C'$ es paralelo a BC . Ahora, como los lados de los triángulos ABC y $AC'B'$ son paralelos, estos triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{AB}{AC'} = 2$, luego $BC = 2C'B'$.

Teorema 1.6.2 *Las medianas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sean ABC el triángulo y A', B', C' , los puntos medios de BC , CA y AB , respectivamente. Si G es el punto de intersección de las medianas BB' y CC' y, como los lados de los triángulos GBC y $GB'C'$ son paralelos ($B'C'$ es paralelo a BC por el lema anterior), los triángulos son semejantes y en razón de semejanza $2 : 1$. Luego, las medianas BB' y CC' se cortan en el único punto G que divide a la mediana en razón $2:1$ ²



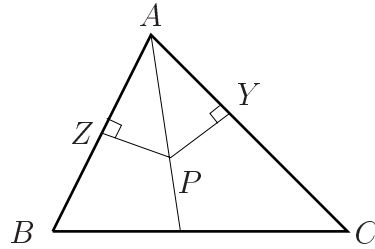
Así, G es el único punto sobre BB' con $\frac{BG}{GB'} = \frac{2}{1}$ y el único sobre CC' con $\frac{CG}{GC'} = \frac{2}{1}$. De manera análoga se demuestra que la otra mediana AA' se intersecta con BB' (y por tanto con CC') en G .

El punto de concurrencia de las medianas del triángulo ABC , se denota por G y se le llama el **centroide**, **centro de gravedad**, **gravicentro** o **baricentro** del triángulo.

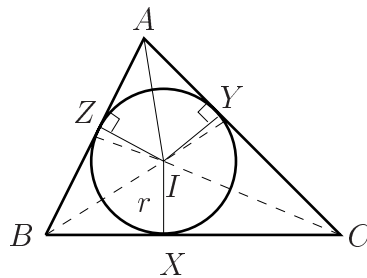
1.6.2 Las bisectrices

La **bisectriz interna** del ángulo $\angle CAB$ del triángulo ABC es la recta por A que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Cada punto P de la bisectriz equidista de cada lado del ángulo, esto es, si Z es el pie de la perpendicular de P sobre AB y Y es el pie de la perpendicular de P sobre CA , entonces $PZ = PY$; esto se sigue de que los triángulos rectángulos AZP y AYP son congruentes.

²Dado un segmento AB y una razón $\frac{p}{q}$, existe solamente un punto P sobre la recta por A y B tal que: $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$.



Recíprocamente, un punto P dentro del ángulo $\angle CAB$ de un triángulo ABC , que cumpla que $PZ = PY$ (donde Y y Z son los pies de las perpendiculares de P sobre CA y AB) es necesariamente un punto de la bisectriz interna; en efecto, los dos triángulos rectángulos APY y APZ son congruentes (ya que tienen dos pares de lados iguales, a saber $PY = PZ$, y AP que es común, entonces, por el teorema de Pitágoras, el otro par de catetos son iguales), por tanto $\angle PAZ = \angle PAY$, lo que muestra que P se encuentra sobre la bisectriz. Denotaremos por b_a, b_b, b_c a las bisectrices internas de los ángulos en A, B, C respectivamente.



Sea I el punto de intersección de las bisectrices b_b y b_c (hay punto de intersección, pues en caso contrario los ángulos en B y C del triángulo sumarían 180°). Sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares de I sobre los lados BC, CA y AB respectivamente. Por estar I en la bisectriz b_c , tenemos que $IX = IY$ y por estar I en la bisectriz b_b , tenemos que $IX = IZ$. Luego, I cumple $IY = IZ$, lo que muestra que I se encuentra en la bisectriz b_a , esto se resume en el siguiente:

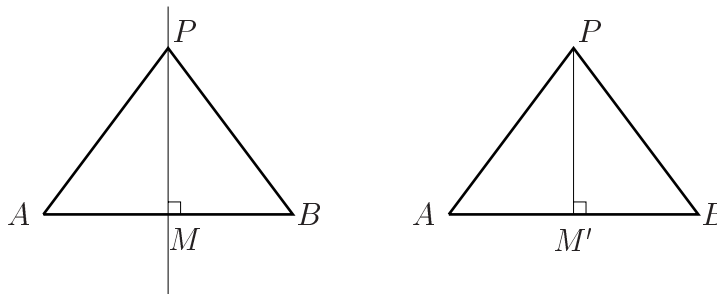
Teorema 1.6.3 *Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.*

El punto de concurrencia de las bisectrices se denota por I y se conoce por **incentro del triángulo** ABC . La distancia del incentro a cada lado del triángulo es la misma, esta distancia se conoce como **inradio** y se denota con r . Resulta que la circunferencia de centro I y radio r , está completamente

contenida en el triángulo y es tangente a los lados BC , CA , AB , en los puntos X, Y, Z . A esta circunferencia le llamaremos **incírculo**.

1.6.3 Las mediatrices

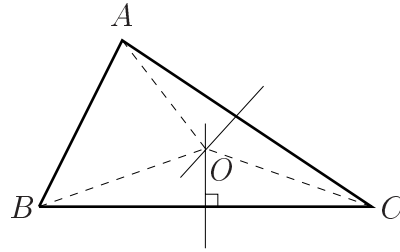
La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Una manera de caracterizarla es como el conjunto de puntos P que cumplen que la distancia a cada extremo A, B es la misma, esto es, $PA = PB$. En efecto, si M es el punto medio de AB y P se encuentra en la mediatriz, entonces podemos formar los dos triángulos rectángulos PAM y PBM . Por el criterio LAL , estos son congruentes (ya que $AM = MB$, PM es común y los ángulos entre los lados que se comparan son rectos), por tanto $PA = PB$.



Recíprocamente, si P es un punto que satisface $PA = PB$ entonces P está sobre la mediatriz de AB . Para ver esto consideramos a M' el pie de la perpendicular de P sobre el segmento AB . Veamos que $M' = M$ de la siguiente manera: Como los triángulos rectángulos PAM' y PBM' tienen dos pares de lados iguales ($PA = PB$ y PM' es común), el teorema de Pitágoras garantiza que los otros catetos son iguales, esto es, $AM' = M'B$. Por tanto, M' es el punto medio de AB .

Teorema 1.6.4 *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sean l_a y l_b las mediatrices de los lados BC y CA del triángulo ABC . Sea O el punto de intersección de estas mediatrices (hay punto de intersección, ya que si son paralelas entonces también BC y CA son paralelos, por lo que no se formaría propiamente un triángulo).



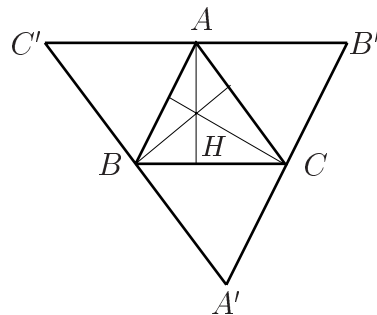
Veamos que el punto O se encuentra también en la mediatriz del segmento AB . Como O está en l_a , $OB = OC$ y como O se encuentra en l_b , $OA = OC$. Luego, O cumple que $OA = OB$, esto es, O está en la mediatriz de AB .

El punto de concurrencia de las mediatrices, que se denota por O , se conoce como el **circuncentro** del triángulo ABC . Como los vértices equidistan a O , la circunferencia de centro O y radio R (la distancia común a los vértices) pasa por los vértices. La circunferencia se llama el **circuncírculo** del triángulo ABC y el radio R el **circunradio**.

1.6.4 Las alturas

Teorema 1.6.5 Las alturas³ de un triángulo son concurrentes.

Primera Demostración. Sea ABC el triángulo y trazamos por cada vértice la recta que es paralela al lado opuesto de tal vértice, estas rectas paralelas determinan un triángulo $A'B'C'$. Como $ABCB'$, $AC'BC$ y $ABA'C$ son paralelogramos, tenemos que A, B y C son puntos medios de $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$ respectivamente y las alturas de ABC son las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ que sabemos, por la sección anterior, que son concurrentes. Luego, las alturas de ABC son concurrentes.



³La definición de altura se dió en la sección 1.4.1

Segunda Demostración. En la sección 1.5.2 se dio la siguiente caracterización de la altura: h_a es el conjunto de puntos P tales que $BP^2 - CP^2 = BA^2 - CA^2$.

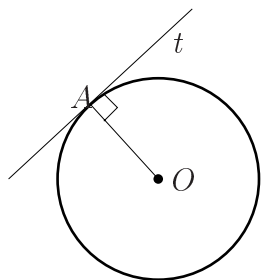
Supongamos que H es un punto común de las alturas h_a y h_b . Entonces H satisface, $BH^2 - CH^2 = BA^2 - CA^2$ y $CH^2 - AH^2 = CB^2 - AB^2$. Al sumar ambos lados de las igualdades, tenemos que H satisface $BH^2 - AH^2 = CB^2 - CA^2 = BC^2 - AC^2$, lo cual nos garantiza que H se encuentra también en la otra altura h_c .

El punto común de las alturas se llama **ortocentro** y se denota por H .

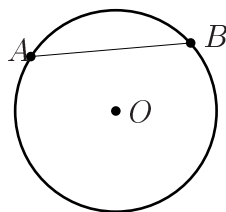
1.7 Ángulos en la circunferencia

1.7.1 Ángulos inscritos

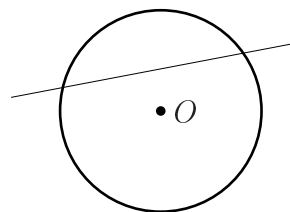
Dada una circunferencia con centro en O y radio r , si consideramos el radio OA y una recta t perpendicular al radio en el extremo A , entonces t se conoce como la **recta tangente** a la circunferencia. A cualquier segmento de recta AB que tenga sus extremos sobre la circunferencia y no sea diámetro le llamamos una **cuerda**. A una recta que corta a la circunferencia en dos puntos le llamamos una **secante**.



tangente

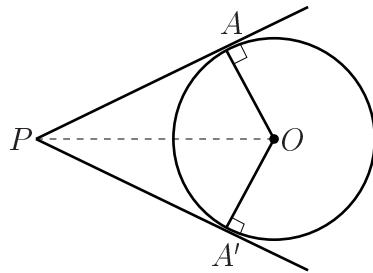


cuerda

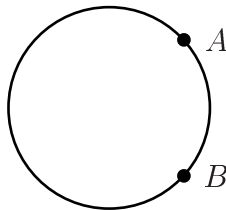


secante

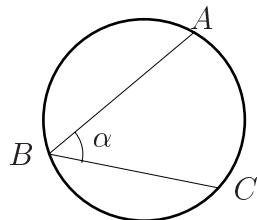
Si trazamos dos rectas tangentes a la circunferencia desde un mismo punto P , entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas. Este hecho es muy sencillo de demostrar, basta observar que los dos triángulos rectángulos PAO y $PA'O$ son congruentes (tienen un cateto igual y la hipotenusa común).



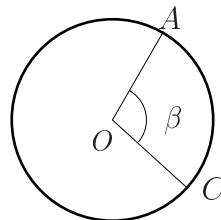
Si tomamos dos puntos A y B sobre una circunferencia, estos determinan dos arcos, ya que, si recorremos la circunferencia en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj tendremos los arcos AB y BA .



Un **ángulo inscrito** en una circunferencia es el ángulo formado por dos cuerdas que tienen un extremo común sobre la circunferencia. Los dos extremos no comunes de las cuerdas definen un arco, al que se llama el **arco que abre el ángulo inscrito**. Un **ángulo central** es el ángulo formado por dos radios.



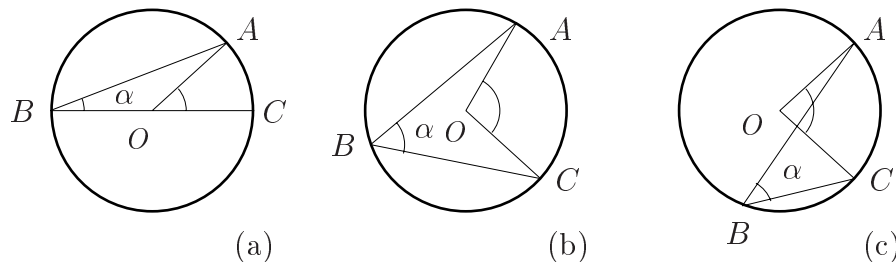
ángulo inscrito



ángulo central

Teorema 1.7.1 (Teorema de la medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, es la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

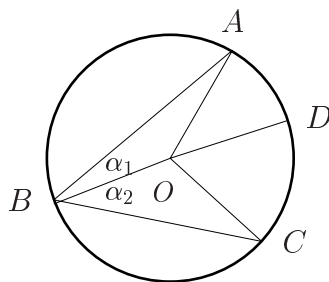
Demostración. Se distinguen tres casos.



Primer caso. Un lado del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia (ver figura anterior (a)).

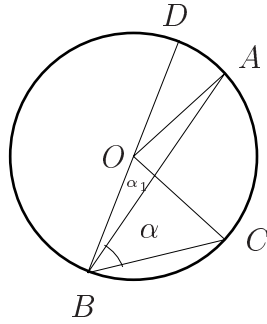
Supongamos que $\alpha = \angle ABC$ es el ángulo inscrito y que el centro de la circunferencia O se encuentra sobre BC . Como el triángulo ABO es isósceles, tenemos que $\angle ABO = \angle BAO = \alpha$ y como la medida del ángulo exterior al vértice O del triángulo ABO es la suma de los otros dos ángulos interiores (proposición 1.3.2), tenemos que $\angle AOC = 2\alpha$ como deseábamos.

Segundo caso. El centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo.



Trazamos la cuerda BD que pase por el centro O . El ángulo $\alpha = \angle ABC$, queda dividido en dos partes por BD , si $\alpha_1 = \angle ABD$ y $\alpha_2 = \angle DBC$, tenemos por el primer caso que $\angle AOD = 2\alpha_1$ y $\angle DOC = 2\alpha_2$. Por lo tanto, $\angle AOC = \angle AOD + \angle DOC = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$.

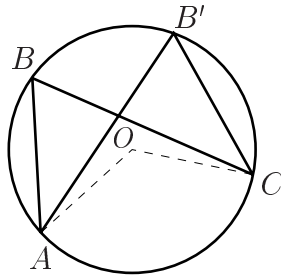
Tercer caso. El centro de la circunferencia es un punto exterior del ángulo.



Trazamos el diámetro BD . Si $\alpha_1 = \angle ABD$ y $\alpha_2 = \angle CBD$, tenemos por un lado que $\alpha = \angle ABC = \alpha_2 - \alpha_1$ y por otro, usando el primer caso, que $\angle AOD = 2\alpha_1$ y $\angle COD = 2\alpha_2$. Luego, $\angle COA = \angle COD - \angle AOD = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 2\alpha$.

Corolario 1.7.2 *Todos los ángulos inscritos que abren un mismo arco tienen la misma medida.*

Demostración. Sean $\angle ABC$ y $\angle AB'C$ dos ángulos inscritos que abren un mismo arco. Por el teorema anterior es claro que $\angle ABC = \angle AB'C = \frac{1}{2}(\angle AOC)$.



Corolario 1.7.3 *Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia. Para cualesquiera dos puntos B y B' de la circunferencia se tiene que: $\angle ABC = \angle AB'C$ o bien que $\angle ABC$ y $\angle AB'C$ son suplementarios.*

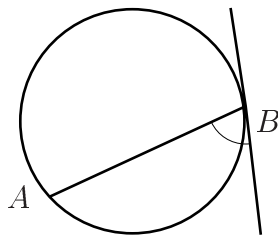
Demostración. Si B y B' se encuentren en el mismo arco, los ángulos inscritos son iguales a la mitad del ángulo central $\angle AOC$. Si B y B' están en arcos diferentes, se tiene que $\angle ABC + \angle AB'C = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle COA) = 180^\circ$.

está en el circuncírculo.

Corolario 1.7.5 Sean A y C dos puntos fijos, el conjunto de puntos B que cumplen que $\angle ABC$ es un ángulo recto es una circunferencia de diámetro AC .

1.7.2 Ángulos semi-inscritos

Un ángulo se dice **semi-inscrito** en un arco cuando tiene su vértice en uno de los extremos del arco, uno de sus lados pasa por el otro extremo del arco y el segundo lado es tangente a la circunferencia.



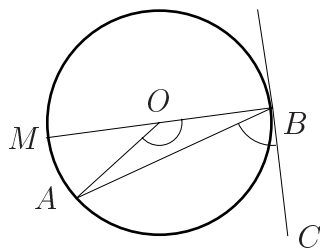
Teorema 1.7.6 (Teorema sobre la medida del ángulo semi-inscrito)

Todo ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

Demostración. Prolonguemos el radio BO para formar un diámetro BM . El ángulo MBC es recto, ya que BC es la tangente, de aquí tenemos que

$$\angle MBC = \frac{\angle MOB}{2}.$$

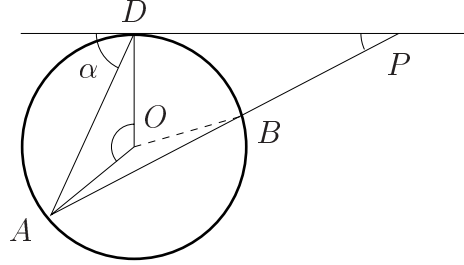
Sabemos también que: $\angle MBA = \frac{\angle MOA}{2}$.



Entonces: $\angle ABC = \angle MBC - \angle MBA = \frac{\angle MOB}{2} - \frac{\angle MOA}{2} = \frac{\angle AOB}{2}$.

El siguiente ejemplo es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Ejemplo 1.7.7 *Considere la tangente al círculo que pasa por el punto D y AB una cuerda que no sea paralela a la tangente. Prolónguese la cuerda AB hasta que intersecte a la tangente en un punto, digamos P . Demuestre que $\angle DPA = \frac{\angle DOA - \angle BOD}{2}$.*



Por ser α un ángulo exterior del triángulo APD , tenemos que

$$\angle DPA + \angle DAP = \angle \alpha$$

Por la proposición anterior tenemos $\angle \alpha = \frac{\angle DOA}{2}$ y por la medida del ángulo inscrito $\angle DAP = \frac{\angle BOD}{2}$. Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que:

$$\angle DPA = \frac{1}{2}(\angle DOA - \angle BOD).$$

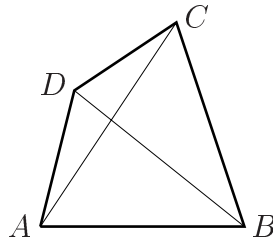
1.8 Cuadriláteros

Por tres puntos no alineados, pasa siempre una circunferencia. Esta afirmación es muy sencilla de comprobar ya que si tenemos tres puntos A , B y C en el plano, éstos pueden ser considerados como vértices de un triángulo, las mediatrices de sus lados se cortan en el circuncentro que es el centro del círculo que pasa por A , B y C .

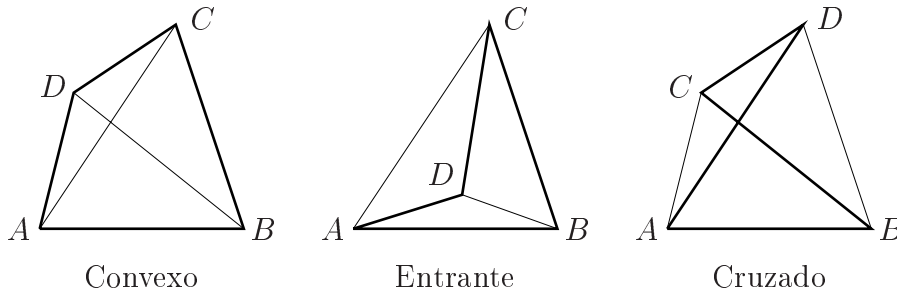
Cuatro puntos tomados al azar no se encuentran por lo general sobre una circunferencia. Cuando cuatro puntos (o más) se encuentran sobre una circunferencia decimos que son **concíclicos** (o más brevemente **cíclicos**). Un polígono se dirá **inscrito** en una circunferencia si sus vértices están sobre

una circunferencia, y el círculo se dice **circunscrito** al polígono. También diremos que el polígono es **cíclico**.

Veamos ahora algunos hechos de los polígonos de cuatro lados o **cuadriláteros**. Diremos que dos lados de un cuadrilátero son **lados adyacentes** o bien **lados opuestos**, de acuerdo a si tienen o no un vértice común. Dos vértices son **vértices adyacentes** o bien **vértices opuestos** dependiendo si pertenecen a un mismo lado o no. Las rectas que unen vértices opuestos se llamarán **diagonales**. Por ejemplo, en el cuadrilátero $ABCD$, AB , BC , CD , DA son los lados y AC , BD las diagonales.



Existen tres tipos de cuadriláteros que se distinguen por tener dos, una o ninguna de sus diagonales dentro del cuadrilátero como se muestra en la siguiente figura. A estos se les conoce respectivamente como **convexo**, **entrante**, **cruzado**.



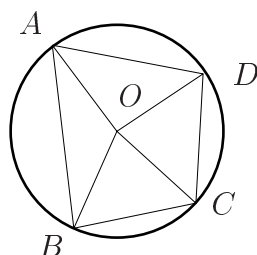
Teorema 1.8.1 *Un cuadrilátero convexo es cíclico si y solamente si tiene dos ángulos opuestos suplementarios.*

Demostración. Si el cuadrilátero convexo $ABCD$ está inscrito en una circunferencia entonces por el corolario 1.7.3:

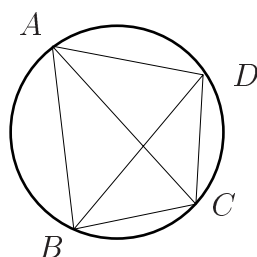
$$\angle A = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD \quad \text{y} \quad \angle C = \angle DCB = \frac{1}{2}\angle DOB,$$

luego

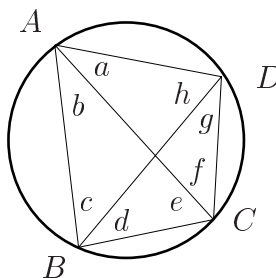
$$\angle BAD + \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOB) = 180^\circ.$$



Recíprocamente, supongamos que los ángulos en A y en C del cuadrilátero convexo $ABCD$ son suplementarios y consideramos el circuncírculo del triángulo BCD . Los puntos P que se encuentran sobre el arco DB opuesto al vértice C , cumplen que el ángulo $\angle BPD$ es suplementario al ángulo $\angle DCB$, por el corolario 1.7.3, y éstos son los únicos por el corolario 1.7.4, luego A se encuentra en tal arco, y por tanto $ABCD$ es cíclico.



Un resultado práctico. Para un cuadrilátero convexo $ABCD$ podemos, además de ver los ángulos en A , en B , en C y en D , considerar otros ocho ángulos, que se forman con los lados del cuadrilátero y las diagonales AC y BD , que denotaremos por a, b, c, d, e, f, g, h como se señala en el dibujo siguiente:



Si el cuadrilátero es cíclico se tiene:

(i) $\angle A + \angle C = 180^\circ$, (ii) $\angle B + \angle D = 180^\circ$, (iii) $a = d$, (iv) $b = g$, (v) $c = f$, (vi) $e = h$.

Las dos primeras afirmaciones se deben al teorema anterior y las siguientes cuatro al teorema de la medida del ángulo inscrito (teorema 1.7.1) y sus corolarios.

Recíprocamente, si alguna de las afirmaciones de (i) a (vi) es verdadera entonces el cuadrilátero es cíclico; en efecto si (i) o (ii) son verdaderas usamos el teorema anterior y si alguna de las afirmaciones (iii), (iv), (v) o (vi) es cierta, usamos los corolarios 1.7.3 y 1.7.4.

Algunos cuadriláteros tienen nombres especiales:

Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. A los lados paralelos del trapecio les llamamos **bases**. Si los lados no paralelos del trapecio son iguales decimos que el **trapecio es isósceles**.

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Un **rombo** es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

Un **rectángulo** es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.

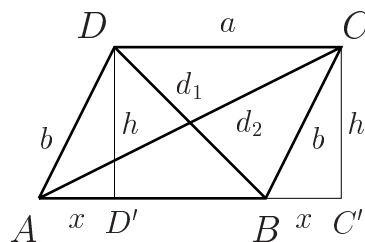
Un **cuadrado** es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

Una propiedad importante de los paralelogramos es:

Teorema 1.8.2 (Ley del paralelogramo) *La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados, es decir, si d_1 y d_2 son las diagonales y a , b los lados, entonces tenemos que*

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Demostración.



Sea $ABCD$ un paralelogramo con diagonales d_1 y d_2 y lados $AB = DC = a$, $DA = CB = b$. Sean D' y C' los pies de las perpendiculares sobre AB de D y C , respectivamente. Consideramos los triángulos BDD' y $AC'C$ como se muestra en la figura anterior.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que,

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + x^2 \\ d_1^2 &= h^2 + (a - x)^2 \\ d_2^2 &= h^2 + (a + x)^2. \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores tenemos que,

$$d_1^2 + d_2^2 = 2h^2 + 2a^2 + 2x^2 = 2a^2 + 2(h^2 + x^2) = 2a^2 + 2b^2.$$

1.9 Construcciones y lugares geométricos

Para hacer una construcción con regla y compás, debemos señalar primero como funcionan estas herramientas. La **regla** es el instrumento que ayuda a trazar la recta que pasa por dos puntos, no importando que tan alejados se encuentren uno del otro, por lo que entre otras cosas no tendremos limitación en cuanto al tamaño o longitud de la regla. El **compás** es el instrumento que ayuda a trazar una circunferencia de la que se conoce el centro y un punto por donde ésta pasa o bien el centro y el radio de ésta; al igual que con la regla, no hay limitación en cuanto al radio de la circunferencia que se va a construir.

Diremos que un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que satisfacen una condición dada.

Por ejemplo: El lugar geométrico que describen los puntos que están en esta página y a 5 centímetros de la orilla izquierda de la página, es evidentemente una recta a 5 centímetros de la orilla izquierda del papel.

Otra forma de describir una recta que pasa por A y B sería como el conjunto de puntos colineales con dos puntos dados A y B . Desde luego los puntos sobre tal recta son colineales con A y B , y cualquier punto colineal con ellos se encuentra en dicha recta. De este modo tenemos que la regla es el instrumento que nos permite construir el lugar geométrico de los puntos colineales con dos puntos fijos dados.

Señalamos también que la circunferencia de centro O y radio r , es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es igual a r , y el compás es el instrumento útil para construir este lugar geométrico.

Hemos descrito dos lugares geométricos fundamentales en la geometría –la recta y la circunferencia– y señalado que éstos son factibles de construirse con regla y compás, si es que conocemos dos puntos de la recta en el primer caso, así como el centro y el radio en el caso de la circunferencia.

Veamos otras construcciones básicas.

1.9.1 Construcciones básicas

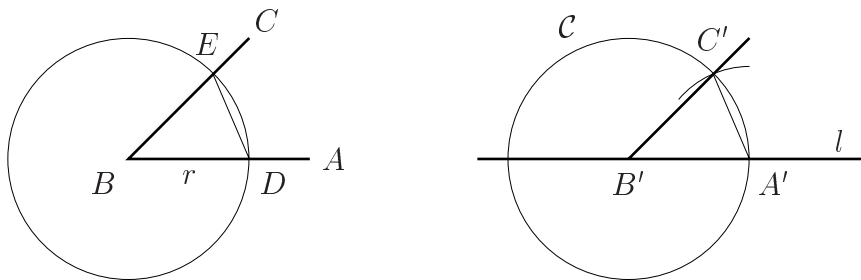
Construcción 1.9.1 *Trasladar un segmento dado sobre una recta dada.*

Solución. Sea AB el segmento dado. Tomemos un punto C sobre la recta dada l y trazamos un arco de circunferencia de centro C y radio AB , que corte a la recta en un punto D . Tendremos que CD es congruente a AB .



Construcción 1.9.2 *Trazar un ángulo igual a un ángulo dado $\angle ABC$.*

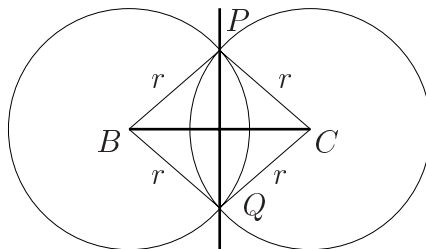
Solución. Sobre una recta l tomemos un punto B' . Trazamos una circunferencia de centro B y radio cualquiera r , que corte BA y BC en D y E respectivamente. Con centro en B' trazamos también una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio r , ésta cortará a l en un punto A' . Finalmente trazamos un arco con centro en A' y radio DE que corte a $\mathcal{C}$ en C' . Los ángulos $\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$ son iguales.



Por el criterio *LLL*, los triángulos EBD y $C'B'A'$ son congruentes. Luego, los ángulos correspondientes son iguales, en particular los ángulos $\angle DBE$ y $\angle A'B'C'$ son iguales.

Construcción 1.9.3 *Construir la mediatriz de un segmento dado.*

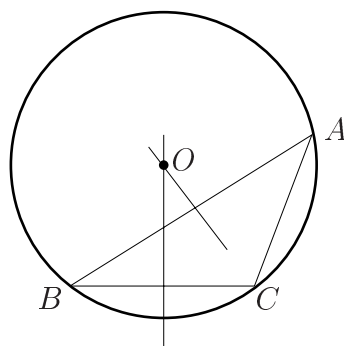
Solución. Sea BC el segmento dado. Con cualquier radio $r > \frac{1}{2}BC$ trazamos dos circunferencias: una con centro en B y otra con centro en C . Sean P y Q los puntos de intersección de las circunferencias, la recta por P y Q es la mediatriz del segmento.



Como $PB = PC = r$ y $QB = QC = r$, entonces p y q están en la mediatriz de BC (sección 1.6.3). Por lo cual la recta que pasa por P y Q es la mediatriz del BC .

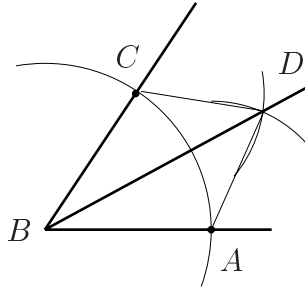
Construcción 1.9.4 *Trazar el circuncírculo de un triángulo dado.*

Solución. Sea ABC el triángulo dado. Basta trazar (usando la construcción anterior) las mediatrices de dos de los lados, digamos de AB y BC . Al punto de intersección de estas mediatrices lo denotamos por O , como la distancia de O a cada vértice es la misma, éste sirve como centro de la circunferencia circunscrita, el radio es la distancia común a los vértices.



Construcción 1.9.5 *Construir la bisectriz interna de un ángulo dado.*

Solución. Sea B el vértice del ángulo dado. Con centro en B trazamos un arco que corte a los lados del ángulo en A y en C .

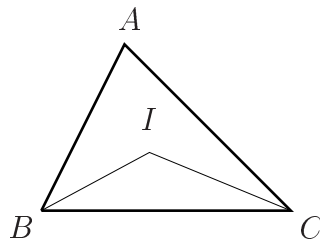


Después, con centros en A y en B , y con radio $r > \frac{1}{2}AC$ trazamos arcos que se intersecten en un punto D . El punto D se encuentra sobre la bisectriz por lo que la recta por B y D es la bisectriz.

En efecto, los triángulos BAD y BCD son congruentes por el criterio LLL , luego sus ángulos correspondientes son iguales; en particular: $\angle CBD = \angle ABD$, por lo que la recta por B y D es la bisectriz.

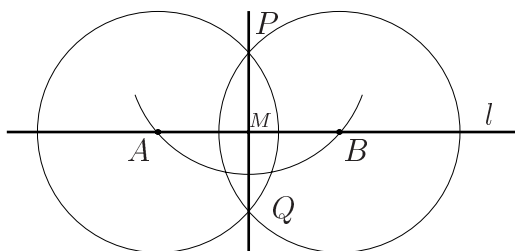
Construcción 1.9.6 *Trazar el incírculo de un triángulo dado.*

Solución. Sea ABC el triángulo dado. Si trazamos las bisectrices internas de los ángulos en B y en C , el punto común de las bisectrices I cumple que la distancia de I a cada uno de los lados es la misma. Entonces la circunferencia de radio igual a esa distancia común y de centro I , es la circunferencia inscrita. Para encontrar la distancia de un punto a una recta dada usamos la construcción siguiente.



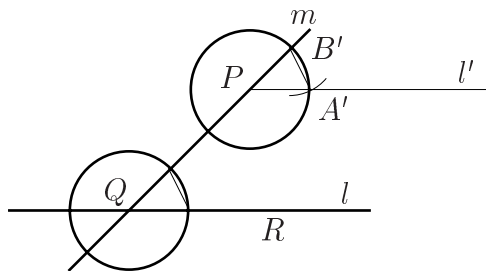
Construcción 1.9.7 *Trazar la perpendicular a una recta dada l por un punto dado P que no se encuentra sobre l .*

Solución. Con centro en P trazamos una circunferencia de radio r de manera que corte en A y en B a la recta dada l . Trazamos ahora otras dos circunferencias de radio r , una con centro en A y otra con centro en B , las circunferencias se intersectan en P y en otro punto Q . La recta por P y Q es la mediatriz del segmento AB , ésta es perpendicular a l y corta a l en M , el punto medio de AB . La longitud del segmento PM es la distancia de P a la recta l .



Construcción 1.9.8 Trazar la paralela a una recta dada l por un punto dado P que no se encuentra sobre l .

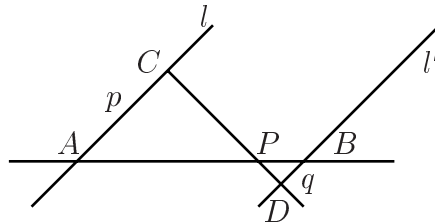
Solución. Trazamos una recta m que pase por P y que corte a l en un punto Q . Sea R sobre l y, con la ayuda de la construcción 1.9.2, trazamos un ángulo igual a $\angle RQP$, que tenga uno de sus lados sobre la recta m y el vértice en P , llamamos a éste $\angle A'PB'$. La recta por A' y P , digamos l' , es la paralela a l , ya que la recta m corta a l y l' en ángulos correspondientes iguales.



Construcción 1.9.9 Dividir un segmento dado AB con un punto P , de manera que $\frac{AP}{PB}$ sea igual a la razón de las longitudes de dos segmentos dados.

Solución. Sean p y q las longitudes de los segmentos dados. Trazamos dos rectas paralelas l y l' , una que pase por A y otra por B . Localizamos sobre

l un punto C de manera tal que $AC = p$, y localizamos sobre l' un punto D con $BD = q$, eligiendo C y D de forma que se encuentren en diferentes semiplanos determinados por la recta por A y B . El segmento CD intersecta a AB en un punto P , éste tiene la propiedad que buscamos: $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$.

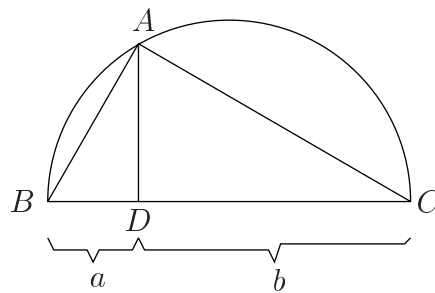


En efecto, los triángulos APC y BPD son semejantes ya que tienen lados correspondientes paralelos, luego $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{DB} = \frac{p}{q}$.

Construcción 1.9.10 *Trazar la media proporcional de dos segmentos.*

Solución. Sean a y b los segmentos dados, buscamos un segmento de longitud x que satisfaga: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

Sobre una recta l , trazamos dos segmentos BD y DC , uno seguido del otro, con BD de longitud a y DC de longitud b . Trazamos la circunferencia de diámetro BC . La perpendicular a BC por D cortará a la circunferencia en un punto A . El segmento AD tiene longitud x , además cumple que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.

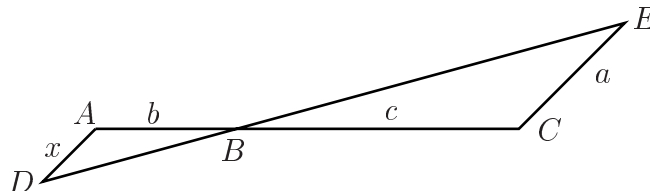


Los triángulos rectángulos DBA y DAC son semejantes, luego $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC}$.

Construcción 1.9.11 *Trazar la cuarta proporcional de tres segmentos.*

Solución. Dados tres segmentos a , b , c , debemos construir con regla y compás un segmento x que cumpla que $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

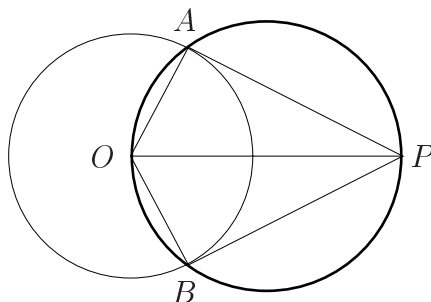
Sobre una recta, localizamos puntos A, B, C de manera que $AB = b$, $BC = c$. Por C trazamos un segmento CE de manera que $CE = a$. Sea D la intersección de la recta por E y B con la paralela a CE que pasa por A . El segmento AD tiene longitud x y satisface $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.



Los triángulos ABD y CBE son semejantes, por lo que: $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Construcción 1.9.12 Trazar las tangentes a una circunferencia dada $\mathcal{C}$ que pasen por un punto dado P que se encuentra fuera de $\mathcal{C}$.

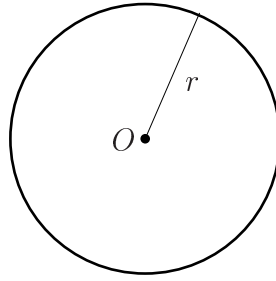
Solución. Supongamos que la circunferencia $\mathcal{C}$ tiene centro O . Trazamos la circunferencia de diámetro OP , ésta cortará a $\mathcal{C}$ en dos puntos A y B . Como OPA y OPB son triángulos rectángulos se tiene que OA es perpendicular a PA , análogamente OB es perpendicular a PB . Luego, PA y PB son las tangentes buscadas.



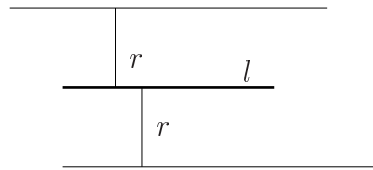
1.9.2 Lugares geométricos

En esta última parte hacemos una lista de lugares geométricos utilizados frecuentemente en geometría elemental.

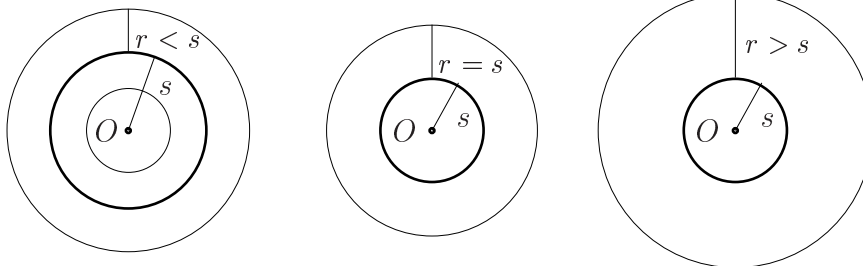
Lugar geométrico 1.9.13 La circunferencia de centro O y radio r es el lugar geométrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a un punto fijo O .



Lugar geométrico 1.9.14 *Los puntos, que equidistan una distancia fija r a una recta fija l , son los que se encuentran en un par de rectas paralelas a la recta dada cada una a distancia r .*



Lugar geométrico 1.9.15 *El lugar geométrico de los puntos, que equidistan una distancia r a una circunferencia fija $\mathcal{C} = (O, s)$, se forma de un par de circunferencias concéntricas si $r < s$, de una circunferencia y el centro O si $r = s$ y una circunferencia si $r > s$.*



Lugar geométrico 1.9.16 *El lugar geométrico de los puntos, que equidistan a dos puntos fijos A y B , es una recta que pasa por el punto medio de AB y es perpendicular a éste segmento.*

Hemos señalado que un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una condición dada. En varios de los problemas donde se tiene que determinar cuál es determinado lugar geométrico sucede que, en base a cierta experimentación, se detecta que éstos pertenecen a una figura, digamos F ,

por lo que se conjetura que F es la figura que describe el lugar geométrico. Para tener certeza de esta afirmación es necesario (y bastará) que verifiquemos los dos hechos siguientes:

Que cualquier punto de la figura F cumpla la condición dada.

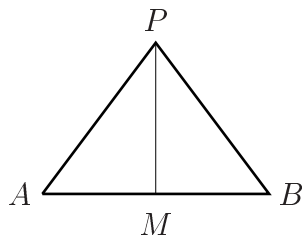
Que cualquier punto que cumpla la condición dada, pertenezca a la figura F .

Algunas veces la segunda condición es más fácil verificarla en su forma contrapuesta:

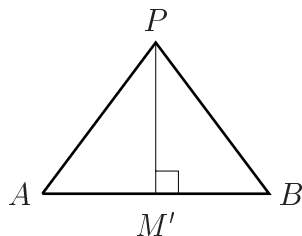
Cualquier punto que no pertenece a la figura F , no cumple la condición dada.

Regresemos al lugar geométrico 1.9.16. Tenemos que el lugar geométrico son los puntos P que cumplen que su distancia a A y B es la misma. Esto lo podemos sintetizar así: $Lg. = \{P ; PA = PB\}$. Y lo que se propone como “figura” del lugar geométrico es la recta por el punto medio de AB y perpendicular a AB , a quien denotamos por F .

Veamos entonces que cualquier punto P de la figura F cumple con la condición $PA = PB$. Sea M el punto medio de AB . Los triángulos rectángulos AMP y BMP tienen dos lados correspondientes iguales ($AM = BM$ y PM es común) y el ángulo entre cada par de lados correspondientes es igual a 90° , por lo que los triángulos son congruentes, y entonces $PA = PB$.

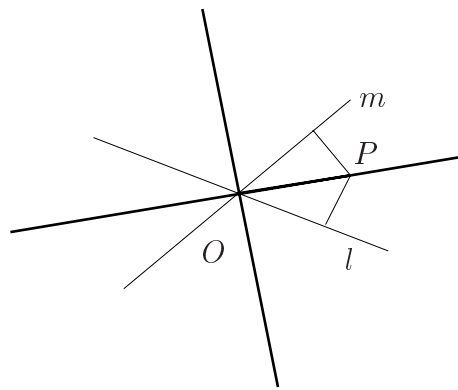


Ahora veamos que se cumple la segunda condición. Sea P un punto que satisface la condición del lugar geométrico, esto es $PA = PB$. Trazamos la perpendicular a AB por P , ésta cortará a AB en un punto M' , que esperamos sea punto medio de AB , ya que en tal caso P se encontrará en la figura F .



En los triángulos rectángulos $AM'P$ y $BM'P$, se tiene que las hipotenusas AP y BP son iguales y que PM' es un cateto común, por el teorema de Pitágoras los catetos AM' y BM' son iguales. Luego, M' es punto medio de AB como deseábamos.

Lugar geométrico 1.9.17 *El lugar geométrico de los puntos, que equidistan a dos rectas fijas l y m que se intersectan en O , es un par de rectas perpendiculares que pasan por O y donde cada una es bisectriz de uno de los ángulos que forman l y m .*

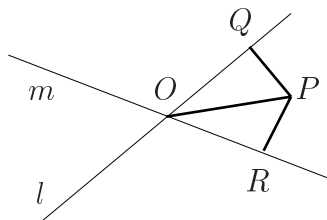


Aquí tenemos que $Lg. = \{P ; dist(P, l) = dist(P, m)\}$, donde $dist(P, l)$ es la distancia del punto P a la recta l ⁴. Y la figura que se propone como lugar geométrico es la formada por dos rectas perpendiculares, donde una es bisectriz de uno de los ángulos entre las rectas l y m y la otra es la bisectriz del otro ángulo.

Las rectas l y m dividen al plano en 4 regiones angulares con vértice en O (el punto de intersección de las rectas).

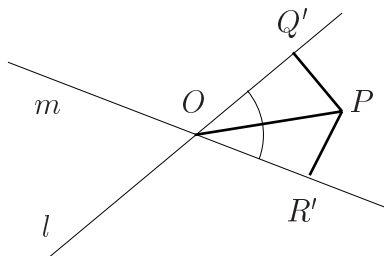
Supongamos que P es un punto del lugar geométrico diferente de O (observe que O es desde luego un punto de $Lg.$) y que no se encuentra sobre l ni sobre m . Luego, deberá estar en alguno de los cuatro sectores. Mostremos que se encuentra en la bisectriz de tal sector.

⁴Ver sección 1.1



Sean Q y R los pies de las perpendiculares desde P a las rectas l y m respectivamente. Por estar P en $Lg.$, tenemos que $PQ = PR$. Luego, los triángulos rectángulos OPQ y OPR tienen la misma hipotenusa OP y dos catetos correspondientes iguales ($PQ = PR$). Por el teorema de Pitágoras, los otros dos catetos (OQ y OR) son iguales y por tanto los triángulos son congruentes, lo que garantiza que los ángulos $\angle POQ$ y $\angle POR$ sean iguales. Y así, P se encuentra sobre la bisectriz del sector.

Recíprocamente, si P se encuentra sobre la bisectriz de uno de los sectores angulares y Q' y R' son las proyecciones de P sobre l y m respectivamente, entonces los triángulos rectángulos OPQ' y OPR' son congruentes por tener dos ángulos correspondientes iguales y la misma hipotenusa. Luego, $PR' = PQ'$, por lo que P se encuentra en $Lg.$



Veamos otros lugares geométricos:

Lugar geométrico 1.9.18 *El lugar geométrico de los puntos P tales que su distancia a un punto fijo F es proporcional a su distancia a una recta fija l , es una **cónica**⁵. La constante de proporcionalidad se conoce como*

⁵El nombre de cónica para designar parábola, hipérbola y elipse, es la abreviación de sección cónica. Ausentes en los elementos de Euclides, las cónicas son el principal objeto

excentricidad, . Si $e = 1$ la cónica es una **parábola**, si $0 < e < 1$ es una **elipse** y si $e > 1$ se llama **hipérbola**.

Lugar geométrico 1.9.19 *El lugar geométrico de los puntos P tales que el cociente de sus distancias a dos puntos fijos A y B sea constante, es una circunferencia, que se conoce como **circunferencia de Apolonio**.*

La discusión de este lugar geométrico se dará en el tercer capítulo.

Lugar geométrico 1.9.20 *El lugar geométrico de los puntos B que cumplen que el ángulo ABC es constante, donde A y C son dos puntos fijos, consta de dos arcos de circunferencia del mismo radio.*

En la sección 1.7, hemos visto con detalle este lugar geométrico.

Ejemplo 1.9.21 *Encontrar el lugar geométrico de los puntos C tales que el triángulo ABC es equilátero, donde A es un punto fijo y B un punto que varía sobre una recta fija.*

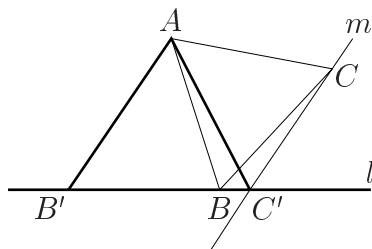
Sean B' y C' sobre la recta fija l , de manera que $AB'C'$ sea equilátero.

Para un punto arbitrario B sobre l , sea C tal que ABC sea equilátero. Tenemos que $ABC'C$ es un cuadrilátero cíclico ya que $\angle ACB = \angle AC'B$, por lo que $\angle BC'C$ es suplementario al ángulo $\angle BAC$. Luego, $\angle BC'C = 120^\circ$ y

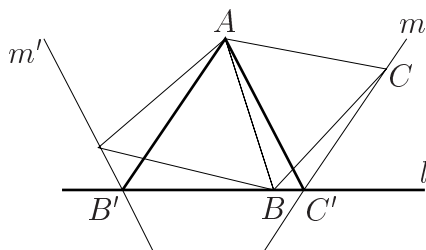
de estudio en un tratado importante de Apolonio (matemático griego del siglo III), él estudia las secciones planas de un cono de base circular y establece que las cónicas son las proyecciones centrales de circunferencias.

En ausencia de formalismo y de notaciones algebraicas las cónicas son descritas por una representación geométrica transparente. Un producto ab es el área de un rectángulo de lados a y b . Una ecuación con términos de segundo grado es una igualdad entre áreas de rectángulos. La construcción de un punto (x, y) de la parábola de ecuación $y^2 = 2px$, es equivalente a la construcción de un rectángulo donde uno de los lados está dado y es igual a $2p$ y donde la superficie es igual a la de un cuadrado y^2 . El nombre de parábola se hereda del griego vía esta construcción ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\vartheta\lambda\eta$ significa comparación). Para la hipérbola la ecuación $y^2 = x(2p + \frac{px}{a})$, se relaciona con la construcción de un rectángulo de área y^2 , donde los lados son la incognita x y una longitud z , más grande que $2p$ de manera que la diferencia entre el rectángulo de lados x, z y el rectángulo de lados $2p, x$ sea un rectángulo semejante al rectángulo de lados p, a . El nombre hipérbola significa “exceso”. Para la elipse de ecuación $y^2 = x(2p - \frac{px}{a})$, hay una construcción análoga con “defecto” (elipse). Las soluciones de estos problemas de construcción se encuentran en el libro VI de Los Elementos de Euclides, desde luego sin mencionar a las cónicas.

entonces C se encuentra sobre la paralela a AB' que pasa por C' . Después de esto uno puede conjeturar que el lugar geométrico es la recta m .



Pero cuidado: el punto C que forma el triángulo ABC , lo construimos del lado “derecho” de AB ; si lo construimos del lado “izquierdo”, con el mismo argumento tendríamos que C , se encuentra sobre la recta m' que es paralela a AC' y pasa por B' .



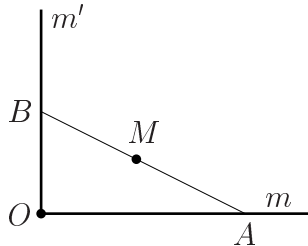
Ahora sí podemos afirmar que el lugar geométrico es la figura F formada por las rectas m y m' . En efecto, dado B sobre l , las formas de elegir C son sólo dos: que se encuentre en uno o en otro lado de AB . En cualquiera de ellas, hemos visto que C pertenece a la figura F .

Recíprocamente, cualquier punto C que se localice en una de esas dos rectas m y m' , es parte del lugar geométrico. En efecto, si por ejemplo C se encuentra sobre m , el circuncírculo de $AC'C$ cortará a l en otro punto B diferente de C' o bien es tangente a l en C' , en cuyo caso hacemos $B = C'$. Es fácil de comprobar que ABC es equilátero (basta observar los ángulos inscritos); luego C es un punto del lugar geométrico, pues hemos localizado un punto B tal que el triángulo ABC es equilátero.

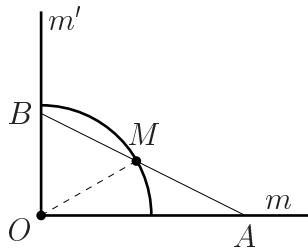
Ejemplo 1.9.22 1. Un segmento de longitud fija l , tiene uno de sus extremos sobre una recta m y el otro sobre una segunda recta m' perpendicular a m . Si el segmento se desliza desde una posición vertical hasta quedar en forma horizontal, ¿qué lugar geométrico describe el punto medio del segmento?

2. Una media circunferencia de diámetro l se desliza entre dos líneas perpendiculares m y m' , ¿qué lugar geométrico describe un punto fijo P de la media circunferencia?

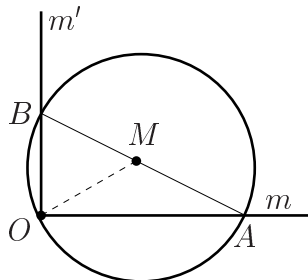
1. Sean A y B los extremos del segmento (A sobre m y B sobre m') y O el punto de intersección de m y m' .



El triángulo OAB es un triángulo rectángulo con ángulo recto en O , por lo que su circuncentro es el punto medio M de AB . Luego, $OM = MA = \frac{1}{2}l$, y entonces M se encuentra sobre la circunferencia de centro O y radio $\frac{1}{2}l$.

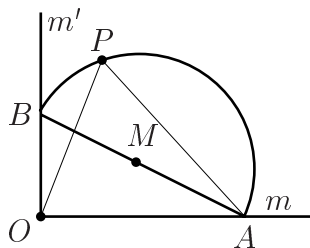


Desde luego no todos los puntos de la circunferencia de centro O y radio $\frac{1}{2}l$ son parte del lugar geométrico, pero aseguramos que la parte de la circunferencia que se encuentra en el “primer cuadrante” sí es el lugar geométrico. Falta solamente comprobar que cualquier punto M de esta parte de circunferencia se encuentra en el lugar geométrico. Si trazamos la circunferencia de centro M y radio $\frac{1}{2}l$, ésta cortará a la recta m en O y en otro punto A , y cortará a m' en O y en otro punto B .

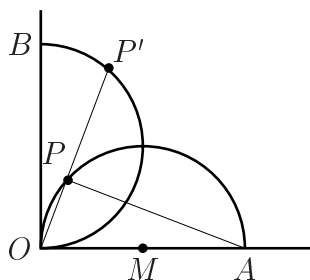


Es claro que AB es un diámetro de la circunferencia, luego es un segmento de longitud l con extremos sobre las rectas m y m' , y punto medio M . Y entonces, M es punto del lugar geométrico.

2. Sean A y B los extremos del diámetro y O el punto de intersección de m y m' . Notemos que $OAPB$ es un cuadrilátero cíclico ya que los ángulos en P y O son de 90° , (por lo que $\angle POB = \angle PAB$), pero el ángulo $\angle PAB$ es fijo, ya que el punto P está fijo sobre la circunferencia. Luego, el punto P siempre se encuentra sobre el rayo que parte de O formando un ángulo igual a $\angle PAB$ con la recta m' .



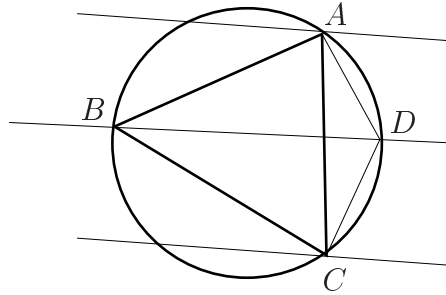
Desde luego no todos los puntos de tal rayo son parte del lugar geométrico. El lugar geométrico es un segmento PP' , de tal rayo cuyos extremos se determinan por las posiciones “límites”, esto es, cuando la media circunferencia tiene el diámetro sobre m y cuando lo tiene sobre m' .



Ejemplo 1.9.23 *Construir un triángulo equilátero con un vértice sobre cada una de tres rectas paralelas fijas.*

Supongamos que ABC es el triángulo que debemos construir. Trazamos su circuncírculo, éste cortará a la recta de enmedio en otro punto D . Por abrir el mismo arco tenemos: $\angle BDC = \angle BAC = 60^\circ$ y $\angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$. Luego, la solución la podemos construir de la siguiente manera: tomar un punto D sobre la segunda recta y construir ángulos de 60° en ambos lados de la segunda recta, los ángulos cortarían a la primera recta en A y a la tercera

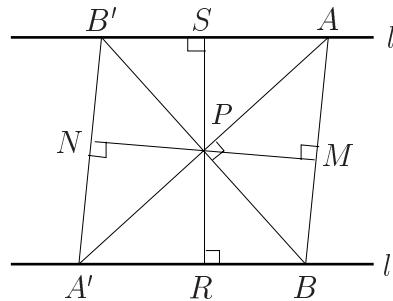
en C , el circuncírculo del triángulo ACD intersecta a la segunda recta en B (y en D), luego ABC es el triángulo buscado.



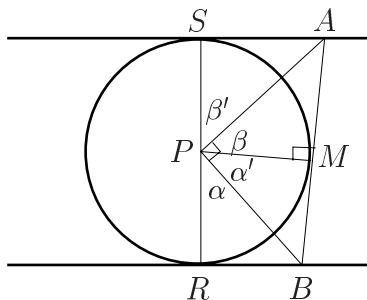
Observemos que: No hay mayor dificultad si en lugar de construir un triángulo equilátero se pide construir un triángulo semejante a un triángulo dado.

Ejemplo 1.9.24 Consideramos dos rectas paralelas l y l' . Un punto fijo P que diste lo mismo de l que de l' . ¿Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AB , donde A está en l y B está en l' y el ángulo APB es recto?

Si A y B están en l y l' respectivamente, hagamos la siguiente construcción: Prolongamos AP hasta que corte a l' en A' y BP hasta que corte l en B' , de esta manera se forma un paralelogramo $ABA'B'$ que queda dividido en cuatro triángulos rectángulos congruentes. Luego, las alturas PM , PR , PN y PS son iguales, por lo que M se encuentra en la circunferencia con centro en P y radio la mitad de la distancia entre las rectas l y l' .



Recíprocamente, si M es un punto de tal circunferencia y distinto de R y S , la tangente por M a la circunferencia corta a l y l' en dos puntos A y B que cumplen que el ángulo APB es recto, la razón de ésto es que los triángulos rectángulos RBP y MBP son iguales (tienen un cateto igual $PM = PR$ y la misma hipotenusa). Luego, los ángulos $RPB = \alpha$ y $MPB = \alpha'$ son iguales.



Análogamente, los triángulos AMP y ASP son iguales, por lo que los ángulos $MPA = \beta$ y $APS = \beta'$ son iguales. Como $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180^\circ$, se tiene entonces que $\alpha' + \beta = 90^\circ$ con lo que podemos concluir que M es parte del lugar geométrico.

1.10 Ejercicios

En esta sección damos una serie de ejercicios que le permitirán al lector reafirmar y ampliar los conocimientos adquiridos en este capítulo, iniciando con problemas relativamente sencillos cuya dificultad se va incrementando.

Ejercicio 1.10.1 Muestre que los lados a, b, c de un triángulo cumplen que: $|a - b| < c$.

Ejercicio 1.10.2 Muestre que los lados a, b, c de un triángulo cumplen que: $c < \frac{a+b+c}{2}$.

Ejercicio 1.10.3 Muestre que es posible construir un triángulo con segmentos de longitudes a, b, c si y sólo si existen números positivos x, y, z tales que: $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Ejercicio 1.10.4 ¿Cuánto mide el ángulo interior de un octágono regular?

Ejercicio 1.10.5 La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Ejercicio 1.10.6 Sea $ABCD$ un cuadrado y O un punto del plano. Muestre que: $OA < OB + OC + OD$.

Ejercicio 1.10.7 Si en un triángulo isósceles trazamos la altura que pasa por el ángulo que forman los dos lados iguales, entonces los triángulos que resultan son congruentes.

Ejercicio 1.10.8 La bisectriz del ángulo distinto en un triángulo isósceles es perpendicular al lado opuesto a este vértice.

Ejercicio 1.10.9 En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes y dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.

Ejercicio 1.10.10 Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces el paralelogramo es un rectángulo.

Ejercicio 1.10.11 En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA , el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA ?

Ejercicio 1.10.12 La recta media de un trapecio, es la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos y es paralela a las bases del trapecio. Muestre que su longitud es la semisuma de las bases del trapecio.

Ejercicio 1.10.13 La recta media de un trapecio divide por la mitad a cualquier segmento que une puntos de sus bases.

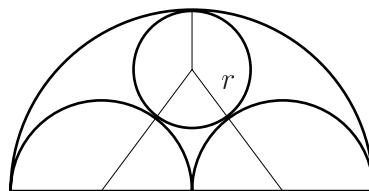
Ejercicio 1.10.14 Las bases de un trapecio son a, b . Encuentre la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Ejercicio 1.10.15 (i) Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

(ii) Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejercicio 1.10.16 Considere un triángulo ABC en el cual $AC > AB$. Una semirrecta con origen B corta a AC en D de tal forma que los ángulos ABD y ACB son iguales. Deduzca que $AB^2 = AC \cdot AD$.

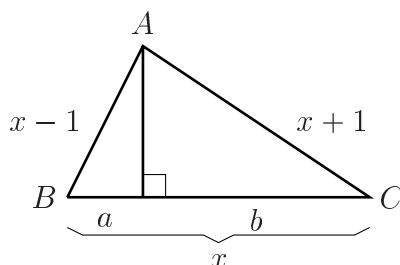
Ejercicio 1.10.17 Dos semicírculos de radio 3 están inscritos en un semicírculo de radio 6, como se muestra en la figura. Un círculo de radio r es tangente a los tres semicírculos. ¿Cuánto vale r ?



Ejercicio 1.10.18 Sobre una mesa se encuentra una semiesfera (mitad de una esfera) de radio uno, con su parte plana apoyada en la mesa. En forma circular, rodeando la semiesfera, se colocan 6 esferas de radio r de tal forma que cada esfera toca la semiesfera, la mesa y las dos esferas adyacentes. ¿Cuánto vale r ?

Ejercicio 1.10.19 Cuatro pelotas de basket-ball se colocan en el piso formando un cuadrado con las cuatro. Una quinta pelota se coloca sobre las otras cuatro de tal forma que toca a todas ellas. Si el diámetro de una pelota es 25, ¿a qué distancia del suelo, se encuentra el centro de la quinta pelota?

Ejercicio 1.10.20 En la siguiente figura, demostrar que $b - a = 4$.



Ejercicio 1.10.21 En un triángulo ABC la mediana $m_a = AA'$ satisface $m_a > \frac{1}{2}a$. Muestre que $\angle BAC$ es agudo.

Ejercicio 1.10.22 Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Una recta por A corta al circuncírculo del triángulo y a la recta BC en los puntos E y D , respectivamente. Muestre que los circuncírculos de los triángulos DCE y BDE son tangentes a los lados AC y AB , respectivamente.

Ejercicio 1.10.23 Sea ABC un triángulo, encuentre un punto D tal que: $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$.

Ejercicio 1.10.24 Sean ABC un triángulo y D un punto tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$. Si AD , BD y CD se prolongan hasta intersectar al circuncírculo del triángulo ABC en B' , C' y A' respectivamente, muestre que ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Ejercicio 1.10.25 Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, una circunferencia $\mathcal{C}_1$ que pasa por A y D corta a la recta AB en E , y otra circunferencia $\mathcal{C}_2$

que pasa por C y D corta a la recta BC en F . Sea G el segundo punto de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Muestre que E , F y G son colineales.

Ejercicio 1.10.26 Una recta que pasa por un punto K en el interior del cuadrado $ABCD$, intersecta a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q , respectivamente. Se dibujan dos circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos KBP y KDQ , respectivamente. Pruebe que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias está sobre la diagonal BD .

Ejercicio 1.10.27 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a tres puntos fijos no colineales?

Ejercicio 1.10.28 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a tres rectas fijas no concurrentes?

Ejercicio 1.10.29 Utilizando únicamente regla y compás biseque un arco dado.

Ejercicio 1.10.30 Dados dos lados a y b de un triángulo con $a < b$ y el ángulo opuesto al lado b , construya un triángulo.

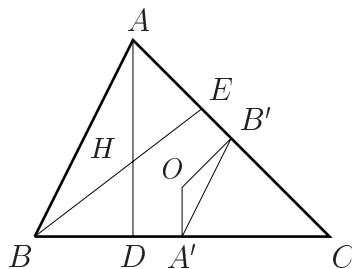
Capítulo 2

Geometría del triángulo

2.1 La Recta de Euler y la circunferencia de los nueve puntos

Lema 2.1.1 *Consideremos ABC un triángulo. Sean H su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC , entonces se tiene que $AH = 2A'O$.*

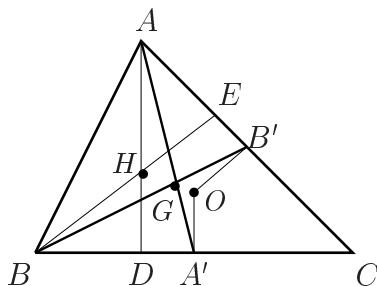
Demostración. Trazamos dos alturas AD y BE y dos mediatrices OA' y OB' .



Tenemos que los triángulos ABH y $A'B'O$ son semejantes, por tener los lados correspondientes paralelos. Además la razón de semejanza es $\frac{AB}{A'B'} = 2$. En particular, $AH = 2A'O$.

Teorema 2.1.2 *En un triángulo ABC el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la **recta de Euler**.*

Demostración. Trazamos dos medianas AA' , BB' para localizar el centroide G , dos alturas AD y BE para localizar el ortocentro H . Por el lema anterior tenemos que $AH = 2A'O$; como G es el centroide sabemos que $AG = 2GA'$, finalmente como AH y $A'O$ son ambas perpendiculares a BC , se tiene que son paralelas y entonces $\angle HAG = \angle OA'G$.

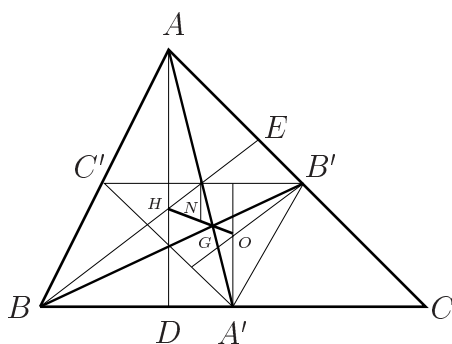


Lo anterior es suficiente para garantizar que los triángulos HAG y $OA'G$ son semejantes, en particular tenemos que $\angle HGA = \angle OGA'$, luego H , G y O son colineales.

Como los triángulos HAG y $OA'G$ son semejantes en razón $2 : 1$, podemos asegurar también que:

$$HG = 2GO. \quad (2.1)$$

Los puntos medios A' , B' y C' de los lados BC , CA y AB , respectivamente, forman un triángulo semejante al triángulo ABC , con razón de semejanza $2 : 1$, llamado el **triángulo medial**.



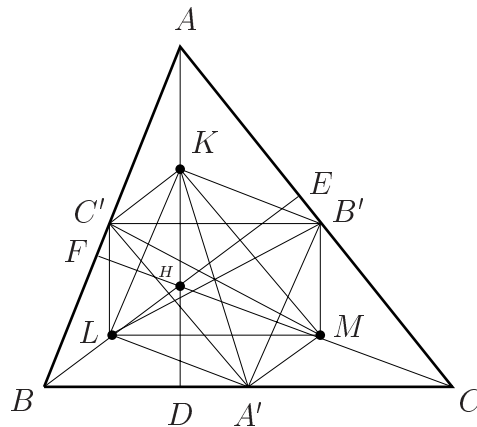
Como el triángulo medial tiene sus lados paralelos al triángulo ABC , tenemos que su ortocentro coincide con el circuncentro del triángulo ABC . Además, tenemos que $C'B'$, $C'A'$ y $A'B'$ dividen al triángulo ABC en cuatro triángulos congruentes y de lados paralelos, por lo que $AC'A'B'$ y $BA'B'C'$ son paralelogramos. Por lo tanto, las diagonales AA' y $B'C'$ se cortan en el punto medio, lo mismo sucede con las diagonales BB' y $C'A'$. Esto muestra que las medianas de los triángulos ABC y $A'B'C'$ coinciden, por lo que los triángulos tienen el mismo centroide G .

Por el teorema 2.1.2, el circuncentro N del triángulo $A'B'C'$ debe ser colineal con G y O , además satisface:

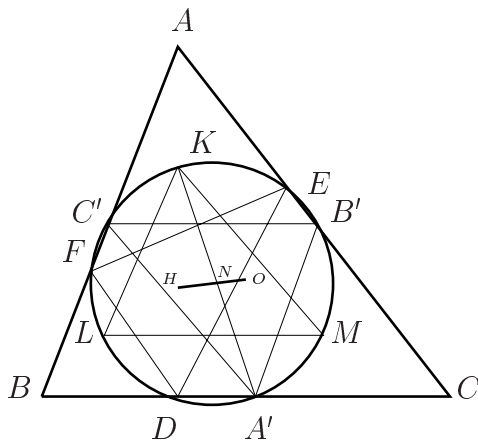
$$OG = 2GN. \quad (2.2)$$

De las ecuaciones (2.1) y (2.2) se deduce que N es el punto medio del segmento HO . Además, como los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, en razón 2:1, el circunradio del triángulo medial es la mitad del circunradio del triángulo ABC .

Consideramos la siguiente figura donde C' , A' y B' son los puntos medios de los lados AB , BC y CA . Los puntos K , L y M son los puntos medios de los segmentos AH , BH y CH . Los segmentos $C'B'$ y LM son paralelos al lado BC y de longitud $C'B' = LM = \frac{1}{2}BC$. Esto se debe a que el lado BC es común a los triángulos ABC y HBC , a que C' , B' son puntos medios de los lados AB y CA del triángulo ABC , y a que L y M son puntos medios de los lados BH y CH .



Análogamente, como AH es un lado común de los triángulos BAH y CAH , los segmentos $C'L$ y $B'M$ son paralelos a AH y su longitud es $C'L = B'M = \frac{1}{2}AH$. Por lo tanto, $B'C'LM$ es un paralelogramo. Más aún, como BC y AH son perpendiculares, el paralelogramo es un rectángulo. Similarmente, se puede demostrar que $A'B'KL$ y $C'A'MK$ son rectángulos. En un rectángulo las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio. Observamos que cada dos de los rectángulos anteriores tienen una diagonal común, por lo tanto, $A'K$, $B'L$ y $C'M$ son diámetros de un mismo círculo, el circuncírculo del triángulo medial $A'B'C'$.



Como el ángulo $A'DK$ es un ángulo recto, el círculo con diámetro $A'K$ pasa por D , análogamente pasa por E y F . Resumiendo tenemos el siguiente:

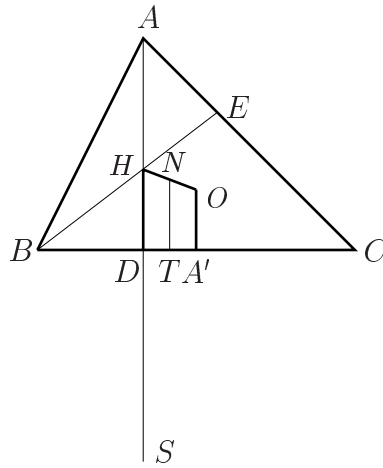
Teorema 2.1.3 (La circunferencia de los nueve puntos) *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio del circuncentro del triángulo ABC .*

Como los puntos K , L y M son diametralmente opuestos a los puntos A' , B' y C' , el triángulo KLM se puede obtener rotando 180° al triángulo $A'B'C'$ y viceversa. Claramente esta rotación intercambia los ortocentros H y O , luego N es el centro de la circunferencia de los nueve puntos. En otras palabras,

Teorema 2.1.4 *El centro de la circunferencia de los nueve puntos se encuentra en la recta de Euler y es el punto medio del segmento HO .*

Ejemplo 2.1.5 Si S es el punto simétrico del vértice A con respecto al lado BC , muestre que HS es cuatro veces la distancia de N a BC .

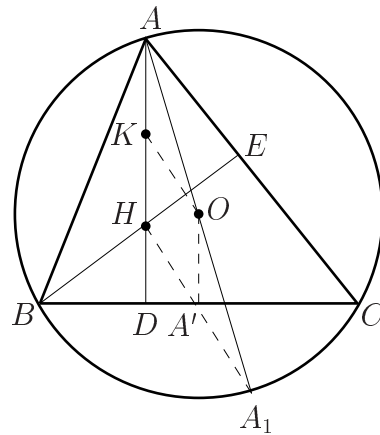
Sea T la perpendicular de N a BC .



Como NT es la recta que pasa por los puntos medios de un trapecio, tenemos que $NT = \frac{1}{2}(HD + OA') = \frac{1}{2}(HD + \frac{1}{2}AH)$, donde A' es el punto medio de BC . Por lo tanto, $4NT = 2HD + AH = HD + AD = HD + DS = HS$.

Ejemplo 2.1.6 Muestre que HA' pasa por el punto diametralmente opuesto a A .

Si A_1 es el punto diametralmente opuesto a A , se tiene que en el triángulo AHA_1 los puntos K y O son puntos medios de los lados AH y AA_1 , luego KO es paralelo a HA_1 .



Por otro lado, $KHA'O$ es un paralelogramo, ya que $KH = OA'$ y, KH y OA' son paralelos. Luego H , A_1 y A' son colineales.

2.2 Teoremas de Ceva y Menelao

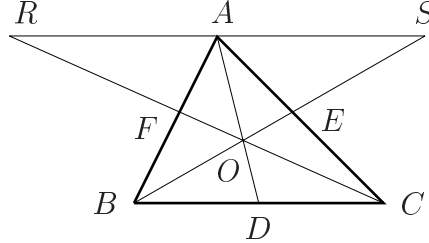
Los segmentos de recta que unen un vértice de un triángulo a cualquier punto del lado opuesto se conocen como **rectas cevianas**.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Ceva) *Si en un triángulo ABC se toman puntos D , E y F sobre los lados BC , AC y AB , respectivamente, de tal forma que las rectas AD , BE y CF concurran en un punto, entonces*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \quad (2.3)$$

El inverso de este teorema también es cierto, es decir, si la ecuación anterior es verdadera entonces las rectas AD , BE y CF son concurrentes.

Demostración. Trazamos l , la recta paralela a BC que pasa por A . Sean R y S los puntos de intersección de CF y BE con l , respectivamente.



Notemos que los triángulos FAR y FBC son semejantes, de donde

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AR}{CB}$$

Análogamente, los triángulos EAS y ECB son semejantes, entonces

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{SA}.$$

También tenemos que los triángulos BOD y SOA , así como, DOC y AOR son semejantes, luego tenemos

$$\frac{BD}{DO} = \frac{SA}{AO}$$

$$\frac{DO}{DC} = \frac{AO}{AR}$$

De donde $\frac{BD}{DC} = \frac{SA}{AR}$. Por lo tanto, $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{SA}{AR} \cdot \frac{CB}{SA} \cdot \frac{AR}{CB} = 1$.

Inversamente, supongamos que BE y CF se intersectan en el punto O y supongamos que AO corta a BC en un punto Q . Por la parte directa de este teorema:

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad (2.4)$$

Como, por hipótesis,

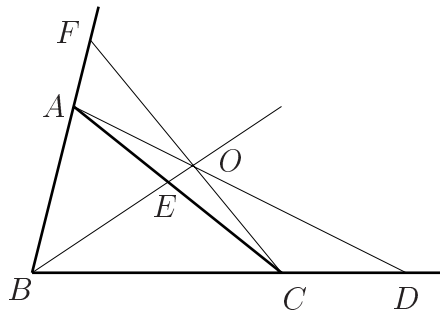
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1, \quad (2.5)$$

al igualar las identidades (2.4) y (2.5) y cancelar tenemos que

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BD}{DC}$$

De aquí que $D = Q$. Por lo tanto AD pasa por O .

Los puntos D , E y F no necesariamente están en los segmentos BC , CA y AB , sino que pueden estar en las extensiones de los segmentos que forman el triángulo.



Para verificar el teorema en este caso es necesario hablar de segmentos dirigidos y de razones negativas entre los segmentos. Un segmento tiene dos sentidos, si los extremos del segmento son A y B , diremos que AB es el **segmento dirigido** que va del extremo A al extremo B . El mismo segmento recorrido del extremo B al extremo A será el segmento dirigido BA y la relación entre estos dos segmentos dirigidos está dada por la ecuación

$$AB = -BA.$$

En la figura anterior BD es el segmento dirigido que va de B a D y DC el que va de D a C , pero este último se recorre en sentido opuesto al que se recorrió BD .

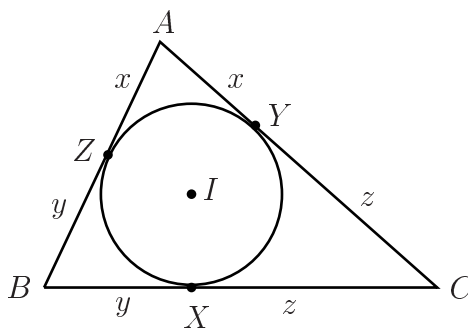
Es también fundamental la **relación de Chasles**:

$$AB + BC = AC$$

válida para cualesquiera tres puntos colineales A , B y C , y donde los segmentos se consideran dirigidos.

Ejemplo 2.2.2 Si el incírculo de un triángulo ABC es tangente a los lados BC , CA y AB en los puntos X , Y y Z respectivamente, entonces las cevianas AX , BY y CZ son concurrentes en un punto llamado el **punto de Gergonne** del triángulo ABC .

Notemos que $AZ = YA = x$ por ser AY y AZ tangentes al incírculo desde el mismo punto (ver sección 1.7). Análogamente, $BX = ZB = y$ y $CY = XC = z$.



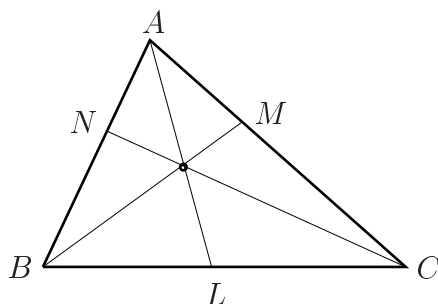
Por lo tanto

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

y entonces, por el teorema de Ceva AX , BY y CZ , son concurrentes.

Ejemplo 2.2.3 Sobre los lados BC , CA y AB de un triángulo ABC se encuentran respectivamente L , M y N de manera que $AB + BL = LC + CA$, $BC + CM = MA + AB$ y $CA + AN = NB + BC$, entonces AL , BM y CN son concurrentes. Este punto de concurrencia se conoce como **punto de Nagel** del triángulo ABC .

Es claro que $AB + BL = LC + CA = BC + CM = MA + AB = CA + AN = NB + BC = s$, donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro.



Luego $BL = s - c$, $LC = s - b$, $CM = s - a$, $MA = s - c$, $AN = s - b$ y $NB = s - a$, por lo que:

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1.$$

Lo que garantiza que las cevianas son concurrentes.

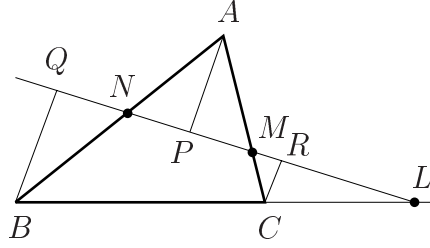
Observamos que el incentro de un triángulo ABC es el punto de Nagel del triángulo medial $A'B'C'$. De aquí podemos concluir que el punto de Nagel N_a , el incentro I y el centroide G del triángulo son colineales y $GN_a = 2IG$.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Menelao) Si una recta intersecta las rectas BC , CA y AB de un triángulo ABC en los puntos L , M y N respectivamente, entonces

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Inversamente, si L , M y N son puntos de los lados BC , CA y AB del triángulo ABC para el cual se cumple la relación anterior, entonces L , M y N son colineales.

Demostración. Sean AP , BQ y CR las perpendiculares desde A , B y C , respectivamente, a la recta donde se encuentran L , M y N .



Es fácil ver que los triángulos rectángulos APN y BQN son semejantes así como los triángulos rectángulos QBL y RCL . De aquí que

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AP}{BQ} \quad \text{y} \quad \frac{BL}{CL} = \frac{QB}{RC}.$$

Por otro lado, los triángulos rectángulos APM y CRM también son semejantes. De modo que

$$\frac{CM}{AM} = \frac{CR}{AP}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} &= \left(-\frac{AP}{BQ}\right) \left(-\frac{QB}{RC}\right) \left(-\frac{CR}{AP}\right) = \\ &= \left(-\frac{AP}{BQ}\right) \left(\frac{BQ}{RC}\right) \left(\frac{RC}{AP}\right) = -1 \end{aligned}$$

La prueba de la afirmación inversa es análoga a la del teorema de Ceva.

El teorema de Menelao nos da un criterio para decir cuándo tres puntos son colineales, mientras el teorema de Ceva nos da un criterio para la concurrencia de tres rectas. Una ecuación alternativa para escribir el teorema de Menelao y enfatizar el contraste que hay con el teorema de Ceva es la siguiente:

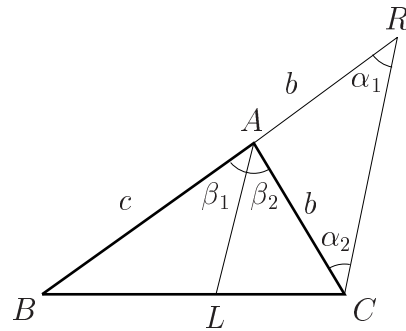
$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1.$$

Teorema 2.2.5 (Teorema de la bisectriz) *La bisectriz interna AL (respectivamente externa AL') del ángulo en A de un triángulo ABC divide internamente (resp. externamente) al lado opuesto BC en razón $\frac{AB}{CA}$, esto es*

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA} \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{BL'}{CL'} = \frac{AB}{CA} \right)$$

donde L es el punto de intersección de la bisectriz interna con el lado BC (respectivamente, L' el punto de intersección de la bisectriz externa con la prolongación del lado BC).

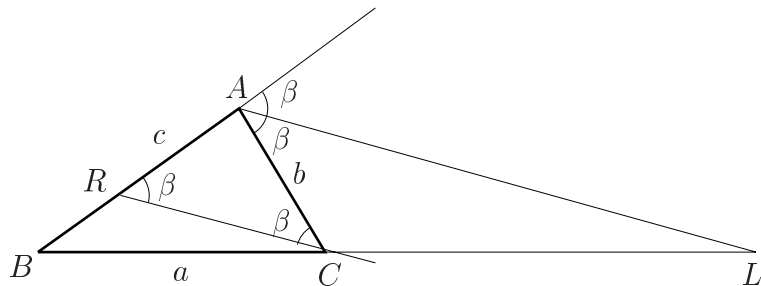
Demostración. Sea AL la bisectriz interna del ángulo interior BAC y, como siempre, b y c las longitudes de los lados CA y AB , respectivamente. Trazamos la paralela a la bisectriz que pasa por el punto C , llamamos R a la intersección de esta recta con la prolongación de AB .



Notemos que $AR = b$. En efecto, tenemos que $\alpha_1 = \beta_1$ por ser rectas paralelas y $\alpha_2 = \beta_2$ ya que son ángulos alternos internos. Como $\beta_1 = \beta_2$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2$, luego el triángulo ACR es isósceles y $AR = b$ como queríamos.

Los triángulos RBC y ABL son semejantes, por ser de lados paralelos, luego, por el teorema de Tales 1.4.5, $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$.

Sea AL' la bisectriz externa del ángulo exterior en A como se muestra en la figura y consideramos CR la recta paralela a AL' que pasa por C . Observamos que el triángulo ARC es isósceles. Ahora bien, como los triángulos RBC y ABL' son de lados paralelos por el teorema de Tales 1.4.5 tenemos que: $\frac{BL'}{L'C} = \frac{BA}{AR} = \frac{c}{b}$.



Como podemos obtener el mismo resultado para la bisectriz de cualquier ángulo, tenemos que:

Teorema 2.2.6 *Cada bisectriz de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes.*

Utilizando el teorema de Ceva se pueden demostrar las afirmaciones siguientes:

Ejemplo 2.2.7 *Para un triángulo ABC , se tiene que:*

- (i) *Las medianas AA' , BB' y CC' concurren.*
- (ii) *Las alturas AD , BE y CF concurren.*
- (iii) *Las bisectrices internas AL , BM y CN concurren.*
- (iv) *La bisectriz interna de un ángulo y dos bisectrices externas de los otros dos ángulos concurren.*

(i) Como $\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = 1$, su producto es obviamente 1, y por el teorema de Ceva las medianas concurren.

(ii) Para mostrar la segunda afirmación observe que los triángulos BEC y ADC son semejantes, por lo tanto $\frac{CE}{DC} = \frac{BC}{CA} = \frac{a}{b}$. Análogamente, de la semejanza de los triángulos BFC y BDA , tenemos que $\frac{BD}{FB} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$. Finalmente, como también ABE y ACF son semejantes entonces $\frac{AF}{EA} = \frac{CA}{AB} = \frac{b}{c}$. Por lo tanto, multiplicando y reacomodando las fracciones tenemos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{AF}{EA} \cdot \frac{BD}{FB} \cdot \frac{CE}{DC} = 1,$$

así, por el teorema de Ceva las alturas concurren.

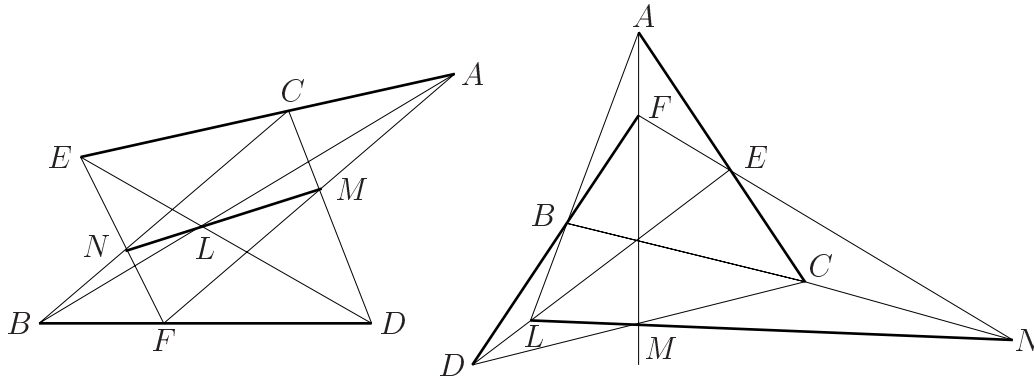
(iii) El teorema de la bisectriz nos garantiza que $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$, $\frac{CM}{MA} = \frac{a}{c}$ y $\frac{AN}{NB} = \frac{b}{a}$, luego el producto es 1, por lo tanto, por el teorema de Ceva se sigue esta afirmación.

(iv) Para verificar la última afirmación, consideramos la bisectriz interna AL , las dos bisectrices externas BM' y CN' , sabemos que: $\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$, $\frac{CM'}{M'A} = -\frac{a}{c}$ y $\frac{AN'}{N'B} = -\frac{b}{a}$, luego el producto es 1.

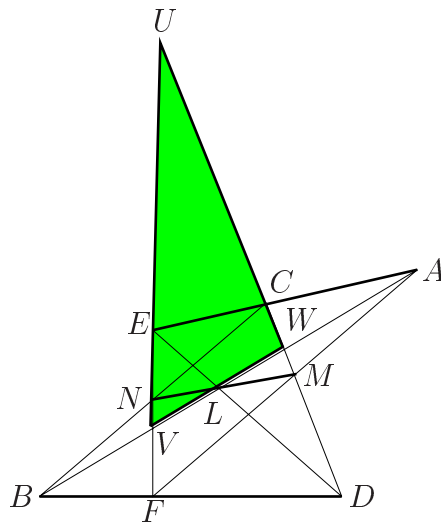
Veamos algunas aplicaciones interesantes del teorema de Menelao.

Teorema 2.2.8 (Teorema de Pappus) *Si A , C , E son tres puntos en una recta, B , D , F tres puntos en otra recta y si las rectas AB , CD , EF intersectan a las rectas DE , FA y BC respectivamente, entonces los tres puntos de intersección L , M y N son colineales.*

Demostración. En cada uno de los conjuntos de tres puntos colineales no importa cual punto está entre los otros dos; de hecho se pueden permutar cíclicamente las letras A, B, C, D, E y F siempre y cuando renombremos también correctamente las intersecciones. Cualquiera de las siguientes dos figuras cumple las condiciones.



Para no considerar puntos en el infinito, supondremos que las tres rectas AB, CD, EF forman un triángulo UVW , como se muestra en la siguiente figura.



Aplicando el teorema de Menelao a las ternas de puntos LDE, AMF, BCN , ACE, BDF en los lados del triángulo UVW obtenemos:

$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WD}{DU} \cdot \frac{UE}{EV} = -1, \quad \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UF}{FV} = -1, \quad \frac{VB}{BW} \cdot \frac{WC}{CU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1,$$

$$\frac{VA}{AW} \cdot \frac{WC}{CU} \cdot \frac{UE}{EV} = -1, \quad \frac{VB}{BW} \cdot \frac{WD}{DU} \cdot \frac{UF}{FV} = -1,$$

dividiendo los productos de las primeras tres expresiones entre el producto de las últimas dos y cancelando obtenemos que

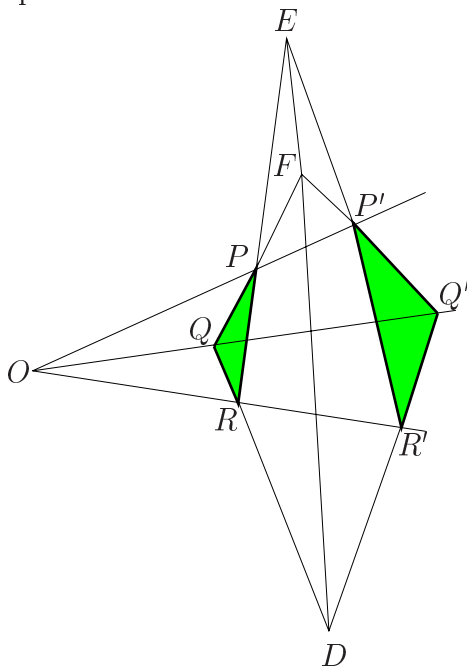
$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1,$$

por lo tanto, por el teorema de Menelao, L , M y N son colineales como afirmamos.

Si dos figuras cualesquiera, formadas de puntos y rectas, se pueden poner en correspondencia de tal forma que los pares de puntos correspondientes los unimos con rectas que concurren en un punto, decimos que las figuras están en **perspectiva desde un punto**. Al punto donde las rectas concurren se le conoce como **centro de perspectiva** o **punto de fuga**.

Teorema 2.2.9 (Teorema de Desargues) *Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto y si sus pares de lados correspondientes se intersectan, entonces los tres puntos de intersección son colineales.*

Demostración. En la siguiente figura los triángulos PQR y $P'Q'R'$ están en perspectiva desde O y sus pares de lados correspondientes se intersectan en D , E y F , respectivamente.



Para la demostración aplicamos el teorema de Menelao a las siguientes ternas de puntos,

$$DR'Q', \quad EP'R' \quad \text{y} \quad FQ'P',$$

en los lados de los triángulos,

$$OQR, \quad ORP \quad \text{y} \quad OPQ,$$

respectivamente. Obtenemos

$$\frac{QD}{DR} \cdot \frac{RR'}{R'O} \cdot \frac{OQ'}{Q'Q} = -1, \quad \frac{RE}{EP} \cdot \frac{PP'}{P'O} \cdot \frac{OR'}{R'R} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{PF}{FQ} \cdot \frac{QQ'}{Q'O} \cdot \frac{OP'}{P'P} = -1.$$

Después de multiplicar y cancelar términos iguales, siempre considerando que son segmentos dirigidos, obtenemos que

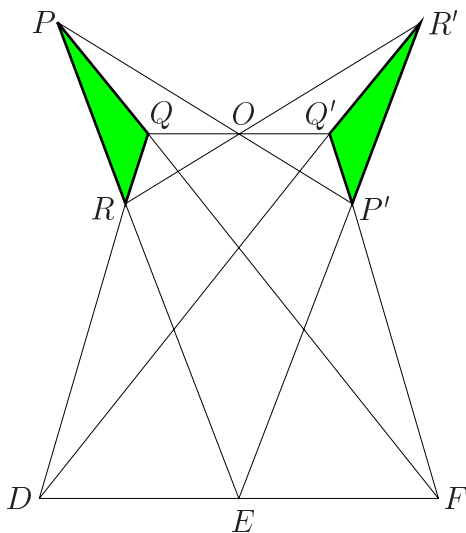
$$\frac{QD}{DR} \cdot \frac{RE}{EP} \cdot \frac{PF}{FQ} = -1.$$

Por lo tanto D , E y F son colineales, como queríamos.

Si dos triángulos cumplen que sus lados correspondientes se intersectan y los puntos de intersección se encuentran sobre una misma recta, diremos que están en **perspectiva desde una recta**. Utilizando este lenguaje, el teorema de Desargues nos dice que si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, entonces están en perspectiva desde una recta. El inverso del teorema de Desargues también es válido.

Teorema 2.2.10 *Si dos triángulos están en perspectiva desde una recta, entonces las rectas que unen dos pares de vértices correspondientes son concurrentes; por lo que los triángulos están en perspectiva desde el punto de intersección de estas rectas.*

Demostración. Cuando decimos que los triángulos PQR y $P'Q'R'$ están en perspectiva desde una recta, sabemos que hay tres puntos que son colineales, a saber, los puntos donde se intersectan los lados correspondientes. Llamamos D al punto de intersección de las rectas QR y $Q'R'$, E al punto de intersección de las rectas RP y $R'P'$ y F al punto de intersección de las rectas PQ y $P'Q'$, como se muestra en la figura siguiente.



Definimos O como la intersección de las rectas PP' y RR' . Si queremos que QQ' pase por el punto O bastará probar que O es colineal con Q y Q' . Como los triángulos FPP' y DRR' están en perspectiva desde el punto E , aplicamos el teorema directo de Desargues a estos triángulos y concluimos que los puntos de intersección de los lados correspondientes, a saber, O , Q' y Q , son colineales como queríamos.

Existe una situación especial del teorema de Desargues para triángulos con pares de lados correspondientes paralelos.

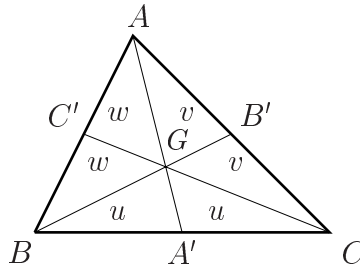
Teorema 2.2.11 *Si PQR y $P'Q'R'$ son dos triángulos en perspectiva desde un punto y éstos tienen dos pares de lados correspondientes paralelos entonces los otros dos lados correspondientes son paralelos. Recíprocamente, si los triángulos PQR y $P'Q'R'$ tienen lados correspondientes paralelos y dos rectas que unen puntos correspondientes se intersectan en un punto O entonces los triángulos están en perspectiva desde O .*

La demostración sólo requiere del manejo de triángulos semejantes y se deja como ejercicio al lector.

2.3 Medianas y alturas

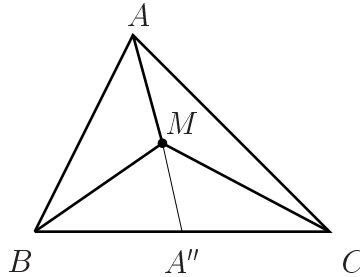
Proposición 2.3.1 *Las medianas dividen al triángulo en seis triángulos que tienen la misma área.*

Demostración. Trazamos las medianas AA' , BB' y CC' y denotamos a su punto común G . El área (GBA') del triángulo GBA' es igual al área $(GA'C)$ del triángulo $GA'C$, ya que las longitudes de sus bases son iguales y tienen la misma altura. Denotaremos por $u = (GBA') = (GA'C)$. Análogamente, $(GCB') = (GB'A) = v$ y $(AC'G) = (GC'B) = w$. Por razones similares, $(ABA') = (AA'C)$, esto implica que $v = w$ y como $(CAC') = (CC'B)$, tenemos que $u = v$, luego $u = v = w$.



Lema 2.3.2 *Un punto M dentro del triángulo ABC tiene la propiedad de que $(ABM) = (AMC)$ si y sólo si M se encuentra sobre la mediana AA' .*

Demostración. Si tenemos la igualdad de áreas $(ABM) = (AMC)$ entonces, como los triángulos ABM y AMC tienen a AM como base común, las alturas de B a AM y de C a AM son iguales.



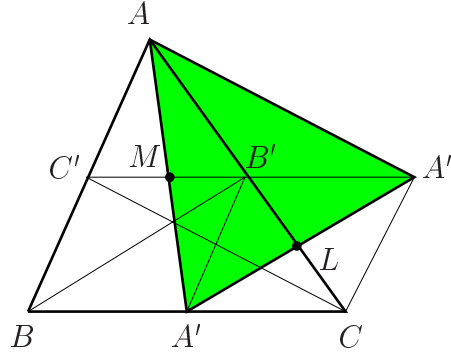
Sea A'' la intersección de AM con BC , como MA'' es común a los triángulos $A''MB$ y $A''CM$, y éstos tienen la misma altura sobre MA'' , tenemos que sus áreas son iguales. Pero los triángulos $A''MB$ y $A''CM$ tienen también la misma altura sobre las bases BA'' y $A''C$, por lo que $BA'' = A''C$. Luego, A'' es punto medio de BC , es decir, M se encuentra sobre la mediana AA' . El recíproco se sigue de que $(BA'M) = (A'MC)$ y $(BA'A) = (A'AC)$, donde A' es el punto medio de BC .

Teorema 2.3.3 *El centroide G es el único punto dentro del triángulo ABC que tiene la propiedad de que los triángulos BCG , CAG y ABG tienen la misma área.*

Demostración. Por el lema anterior un punto M dentro del triángulo ABC cumple que $(ABM) = (BCM) = (CAM)$ si y sólo si M se encuentra en las medianas AA' , BB' y CC' , esto es, si y sólo si M es el centroide.

Consideramos un triángulo ABC y prolonguemos la recta que une los puntos C' , B' hasta un punto A'' de manera que $A''B' = B'C' = \frac{1}{2}BC$. Resulta que $BA'A''B'$ es un paralelogramo, luego $A'A'' = BB'$. Como también $A'CA''B'$ es un paralelogramo, tenemos entonces que $A''C = A'B' = \frac{1}{2}AB$. Luego $AC' = A''C = \frac{1}{2}AB$ y son paralelas, por lo que $AC'CA''$ es otro paralelogramo y entonces $AA'' = CC'$.

Podemos resumir todo esto diciendo que $AA'A''$ es un triángulo donde sus lados AA' , $A'A''$, $A''A$ son iguales a las medianas del triángulo ABC .



Observamos que, como $A'CA''B'$ es un paralelogramo, sus diagonales se bisecan. Luego, el punto de intersección L , de las diagonales $B'C$ y $A'A''$, es punto medio de éstas. Por lo tanto, AL es mediana del triángulo $AA'A''$. Análogamente, por ser $AC'A'B'$ paralelogramo, M , la intersección de las diagonales AA' y $B'C'$, es punto medio de ellas y por lo tanto $A''M$ es mediana del triángulo $AA'A''$. Como AL y $A''M$ se cortan en B' , resulta que B' es el centroide del triángulo $AA'A''$.

Lo anterior lo podemos utilizar para garantizar el siguiente:

Ejemplo 2.3.4 *Si tres números m_a , m_b y m_c representan las longitudes de los lados de un triángulo, entonces puede formarse otro triángulo ABC cuyas medianas tengan longitudes m_a , m_b y m_c .*

En efecto, las longitudes de los lados del triángulo ABC que buscamos se pueden obtener al multiplicar por $\frac{4}{3}$ las longitudes de las medianas del triángulo de lados m_a , m_b y m_c , pues sabemos que $AL = \frac{3}{4}b$.

Ejemplo 2.3.5 Si a , b y c son las longitudes de los lados de un triángulo ABC y m_a , m_b y m_c son las longitudes de las medianas del triángulo ABC , tenemos que:

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Analizando la figura anterior, tenemos que $m_a = AA' < AB' + B'A' = \frac{1}{2}(b + c)$. Análogamente, tenemos que $m_b < \frac{1}{2}(c + a)$ y $m_c < \frac{1}{2}(a + b)$. Sumando estas tres desigualdades obtenemos:

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Aplicando ahora esta desigualdad al triángulo $AA'A''$, podemos también concluir que:

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c.$$

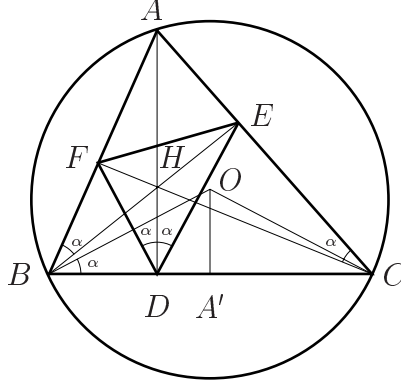
Podemos además deducir el valor de las **longitudes de las medianas** en términos de las longitudes de los lados, por ejemplo, en el paralelogramo $AC'A'B'$, se tiene, por la ley del paralelogramo, que $m_a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$, luego

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Finalmente podemos encontrar el área del triángulo $AA'A''$, si h_a es la altura sobre el lado a del triángulo ABC , el área del triángulo $AA'A''$ es:

$$(AA'A'') = \frac{1}{2}A''M \cdot h_a = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}BC \right) h_a = \frac{3}{4} \left(\frac{a \cdot h_a}{2} \right) = \frac{3}{4}(ABC).$$

En la sección 1.5 vimos que las alturas de un triángulo ABC concurren, veamos algunas otras propiedades relacionadas con las alturas de un triángulo. Al triángulo formado por los pies de las alturas le llamamos el **triángulo órtico**. En la siguiente figura hemos dibujado el triángulo órtico de un triángulo acutángulo



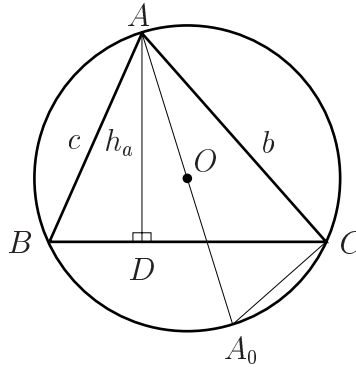
Los ángulos en la base del triángulo isósceles OBC , miden $90^\circ - \angle A'OC = 90^\circ - \angle BAC$ (teorema 1.7.1). Por otro lado, tenemos que $\angle EBA = \angle FCA = 90^\circ - \angle BAC$, además los cuadriláteros $BDHF$ y $CEHD$ son cíclicos (ver teorema 1.8.1), luego

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle EBA = \angle FCA = \angle ECH = \angle EDH,$$

es decir, HD biseca al ángulo EDF . Análogamente, HE biseca el ángulo DEF y HF biseca el ángulo DFE . Por lo tanto, tenemos:

Teorema 2.3.6 *El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro del triángulo órtico.*

Veamos algo más sobre las alturas de un triángulo. Consideramos el triángulo ABC , $AD = h_a$ la altura desde el vértice A , O el centro del circuncírculo, y AA_0 el diámetro que pasa por A .



Los ángulos en B y en A_0 son iguales, ya que abren el mismo arco, entonces los triángulos rectángulos ABD y AA_0C son semejantes, por lo que

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{AA_0} \quad \text{de donde} \quad h_a = \frac{bc}{2R}. \quad (2.6)$$

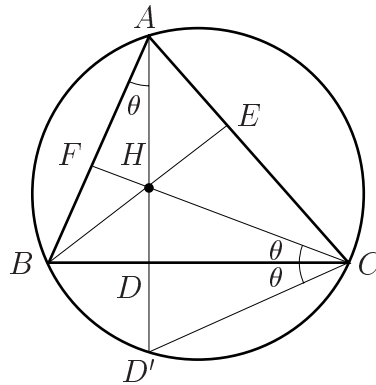
Sustrayendo del ángulo BAC los ángulos A_0AC y BAD que son iguales a $90^\circ - \angle B$, tenemos que

$$\begin{aligned} \angle DAA_0 &= \angle A - 2(90^\circ - \angle B) = \angle A + 2\angle B - (\angle A + \angle B + \angle C) \\ &= \angle B - \angle C. \end{aligned}$$

Esta expresión para el ángulo DAA_0 se hizo haciendo referencia a la figura anterior donde $\angle B > \angle C$. Si tenemos que $\angle B \leq \angle C$, los ángulos iguales A_0AC y BAD se traslapan, lo que implica que $\angle DAO = \angle C - \angle B$. Podemos incluir ambos casos escribiendo

$$\angle DAO = |\angle B - \angle C|. \quad (2.7)$$

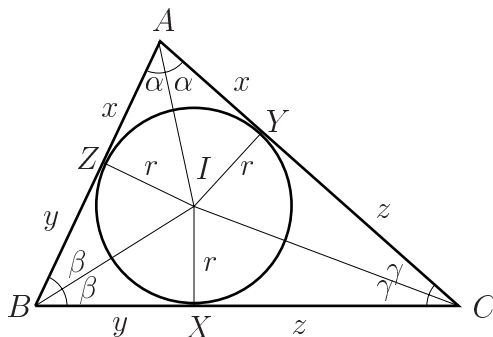
Consideramos ahora la extensión de la altura AD hasta que toque al circuncírculo en el punto D' . Tenemos que $\angle DAB = \angle FCB$, ya que ambos son complementarios del ángulo en B . También $\angle BCD' = \angle BAD'$, por abrir el mismo arco, luego los triángulos rectángulos CDH y CDD' son congruentes y nos muestran que $HD = DD'$.



Una propiedad más que podemos deducir de la figura anterior, es el hecho de que si H es el ortocentro del triángulo ABC , entonces A es ortocentro del triángulo HBC , B es el ortocentro del triángulo HCA y C es el ortocentro del triángulo HAB . Observamos además que los triángulos ABC , HBC , HCA y HAB tienen el mismo circunradio, ya que, BHC es congruente con $BD'C$.

2.4 Incírculo y excírculos

En la siguiente figura mostramos el incírculo del triángulo ABC que, como ya se vió en la sección 1.5, su centro es el punto de concurrencia de las bisectrices. Llamamos X, Y, Z los puntos de tangencia con el lado BC, CA y AB , respectivamente.

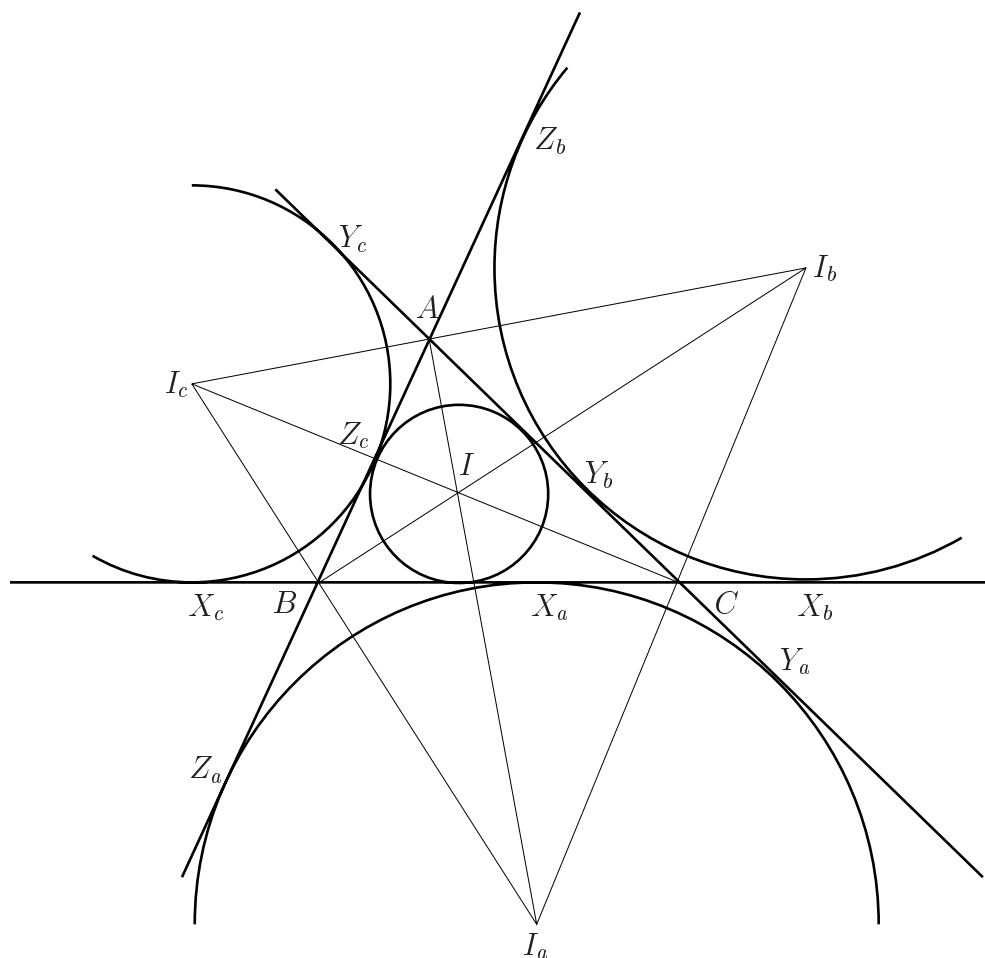


Como las dos tangentes desde cualquier punto exterior a una circunferencia son iguales, tenemos que $AY = AZ = x$, $BZ = BX = y$ y $CX = CY = z$ (ver sección 1.7). Además, $y + z = a$, $z + x = b$ y $x + y = c$. Sumando estas ecuaciones tenemos que $2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$ donde s denota el semiperímetro, luego:

Teorema 2.4.1 (i) $x + y + z = s$.
(ii) $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$.

En la figura de la siguiente página, los lados del triángulo $I_a I_b I_c$ son las bisectrices externas de los ángulos en A, B y C . Cualquier punto en la bisectriz $I_c I_a$ del ángulo externo en B es equidistante de AB y BC . Similarmente, cualquier punto en $I_a I_b$ es equidistante de BC y CA . Entonces el punto de intersección I_a de las dos bisectrices está a una distancia r_a de los tres lados. Como I_a es equidistante de los lados AB y AC , está en la bisectriz interna IA del ángulo en A . Lo anterior lo podemos resumir en el siguiente:

Teorema 2.4.2 Las bisectrices externas de cualesquiera dos ángulos de un triángulo son concurrentes con la bisectriz interna del tercer ángulo.



El círculo con centro I_a y radio r_a es uno de los tres círculos excritos que tiene como tangentes a los tres lados y lo llamamos el **excírculo** (I_a, r_a) , análogamente se definen (I_b, r_b) y (I_c, r_c) . Llamamos a I_a, I_b, I_c los **excentros** y sus radios r_a, r_b y r_c sus **exradios**. Cada excírculo toca a uno de los lados del triángulo internamente y a los otros dos externamente, es decir, toca a la extensión del lado.

En la figura anterior, observamos que, como dos tangentes desde un punto exterior al círculo tienen la misma longitud, entonces $BX_b = BZ_b$, además

$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= (BC + CX_b) + (Z_bA + AB) \\ &= BC + CY_b + Y_bA + AB = a + b + c = 2s. \end{aligned}$$

Luego las tangentes desde B al excírculo (I_b, r_b) tienen longitud s . Algo

similar sucede para cualquier otro vértice, por lo que tenemos

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = s.$$

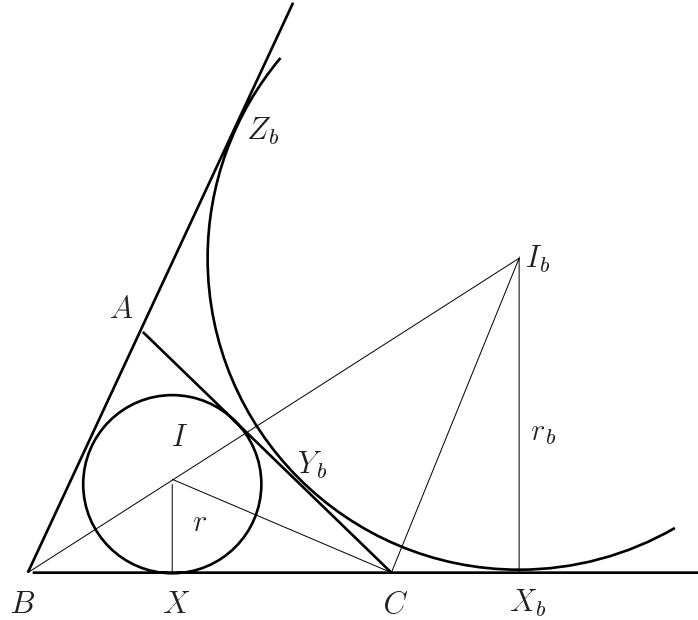
También tenemos que $CX_b = BX_b - BC = s - a$, y relaciones similares en todos los lados:

$$\begin{aligned} BX_c &= BZ_c = CX_b = CY_b = s - a, \\ CY_a &= CX_a = AY_c = AZ_c = s - b, \\ AZ_b &= AY_b = BZ_a = BX_a = s - c. \end{aligned}$$

Podemos calcular el radio del incírculo y el excírculo en términos de a , b y c , como sigue. En la figura de abajo tenemos que los triángulos BIX y BI_bX_b son semejantes, luego sus lados son proporcionales y entonces,

$$\frac{r}{r_b} = \frac{BX}{BX_b} = \frac{s - b}{s}, \quad (2.8)$$

donde s denota el semiperímetro (la notación que estamos usando es igual a la del teorema 2.4.1). Los triángulos IXC y CX_bI_b también son semejantes por ser de lados correspondientes perpendiculares (la bisectriz interior y exterior son perpendiculares).



Por lo tanto,

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-a}{r_b} \Leftrightarrow r \cdot r_b = (s-c)(s-a). \quad (2.9)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones formado por (2.8) y (2.9) con incógnitas r y r_b , obtenemos que:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (2.10)$$

$$r_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}. \quad (2.11)$$

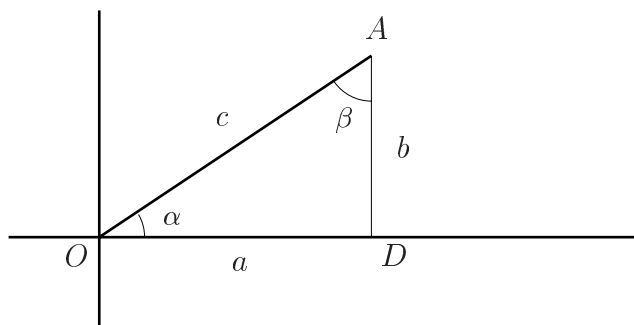
Tenemos ecuaciones análogas para los circunradios r_a y r_b de las otras dos circunferencias excritas.

2.5 Trigonometría

Seleccionamos en el plano dos rectas perpendiculares x y y . La recta x la dibujamos horizontal y la llamamos el eje x o eje de las abscisas. Definimos como la dirección positiva a la dirección en el eje x que va de izquierda a derecha. La recta y se llama el eje y o eje de las ordenadas, la dirección positiva en el eje y es la que va de abajo hacia arriba. El punto de intersección de las dos rectas lo llamamos el origen y lo denotamos por O . Determinado el punto de intersección llamaremos el eje positivo de las x a los puntos que quedan a la derecha de O y el eje negativo a los puntos que están a la izquierda de O , análogamente el eje positivo de las y es la parte por encima de O y negativa la parte del eje que queda por debajo de O . Si marcamos un punto cualquiera A en el plano y trazamos la recta que une este punto con el origen, determinamos un ángulo formado con el eje positivo de las x y esta recta. Si llamamos α a este ángulo diremos que el ángulo **es positivo** si lo medimos a partir de la parte positiva del eje de las x y en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj y **negativo** si lo medimos en el sentido contrario al avance de las manecillas del reloj. Luego, el ángulo α varía entre 0 y 360° .

Supongamos que el punto A está a la derecha del eje y y por encima del eje x . Trazamos el segmento OA y una perpendicular desde A al eje de las x , llamamos D al pie de la perpendicular. Tenemos entonces el triángulo

rectángulo AOD . Llamamos α y β a los ángulos que no son rectos de nuestro triángulo como se muestra en la siguiente figura:



Las funciones o relaciones trigonométricas del ángulo α son cocientes entre los lados del triángulo rectángulo y se definen como sigue:

1. El **seno** del ángulo α , lo denotamos como $\text{sen } \alpha$ y es $\text{sen } \alpha = \frac{AD}{OA}$.
2. El **coseno** del ángulo α , lo denotamos como $\text{cos } \alpha$ y es $\text{cos } \alpha = \frac{OD}{OA}$.
3. La **tangente** del ángulo α , la denotamos como $\text{tan } \alpha$ y es $\text{tan } \alpha = \frac{AD}{OD}$.

Considerando únicamente las definiciones, tenemos algunas relaciones obvias: $\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha$, $\text{cos } \beta = \text{sen } \alpha$, $\text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$, $\text{tan } \alpha \text{ tan } \beta = 1$.

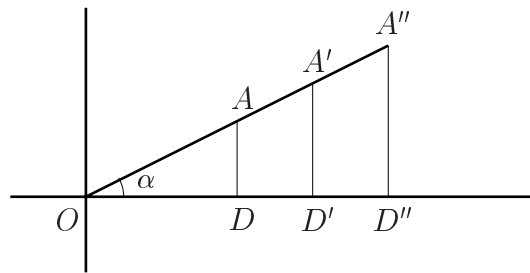
Definimos las recíprocas de cada una de estas funciones, y las llamamos la cosecante, la secante y la cotangente, por:

$$\csc \alpha = \frac{OA}{AD}, \quad \sec \alpha = \frac{OA}{OD} \quad \text{y} \quad \cot \alpha = \frac{OD}{AD}.$$

En el triángulo rectángulo AOD , llamaremos a OD el **cateto adyacente** al ángulo α y a AD el **cateto opuesto** al ángulo α y claramente OA es la hipotenusa del triángulo rectángulo OAD . Luego, podemos definir a las funciones trigonométricas como

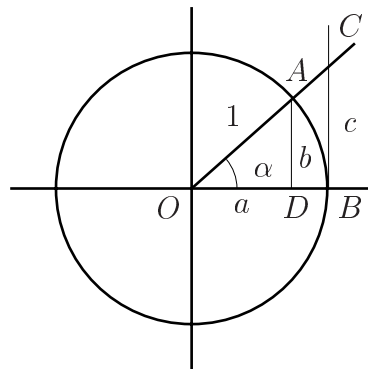
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}.$$

Las funciones trigonométricas dependen solamente del ángulo, no de los triángulos de referencia. Si el ángulo es igual no importa que los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos sean distintos, ya que como tendremos triángulos semejantes las relaciones entre los catetos y la hipotenusa serán iguales.



Hasta el momento, hemos definido las funciones trigonométricas para ángulos agudos, sin embargo, se pueden extender para cualquier ángulo como mostramos a continuación.

Como ya dijimos que las funciones trigonométricas no dependen del tamaño de los catetos y la hipotenusa del triángulo, consideramos un círculo de radio uno y medimos el ángulo a partir del eje positivo de las x . A cada ángulo le corresponde una longitud de arco en el círculo unitario. Llamamos S a la longitud del arco medido desde el punto $(1,0)$ entonces como el perímetro de la circunferencia de radio es 2π , S varía entre 0 y 2π . De aquí, podemos establecer la relación que hay entre un ángulo y la longitud del arco que éste define.



Con esto tenemos que la longitud de un arco correspondiente a un ángulo de un grado es $2\pi/360$. Luego, si el ángulo es α , la longitud del arco correspondiente a éste ángulo será

$$S = \alpha \frac{2\pi}{360} \quad \text{o bien} \quad \alpha = S \frac{360}{2\pi}.$$

Las funciones trigonométricas que definimos estarán dadas por $\cos \alpha = a$, $\sin \alpha = b$, que las podemos ver como la base y la altura del triángulo OAD , respectivamente. Es decir, que el punto D tiene coordenadas

$(a, 0) = (\cos \alpha, 0)$ y el punto A tiene coordenadas $(a, b) = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$. La $\tan \alpha = c = \frac{b}{a}$, es la altura del triángulo OBC , esta relación es obvia ya que los triángulos OBC y ODA son semejantes.

Si en lugar de considerar un ángulo positivo α consideramos el ángulo $-\alpha$, podemos ver inmediatamente que $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$, ya que la base del triángulo será la misma mientras que $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$ y $\tan \alpha = -\tan(-\alpha)$. Por otro lado, tenemos también que $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$ y $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, ya que si consideramos una reflexión del triángulo con respecto al eje de las ordenadas, la altura del triángulo reflejado será la misma, mientras que la base estará dada por $-a$, es decir, que la reflexión del punto $(a, 0)$ es el punto $(-a, 0)$.

Otra relación que se deduce facilmente utilizando el círculo trigonométrico y el teorema de Pitágoras es

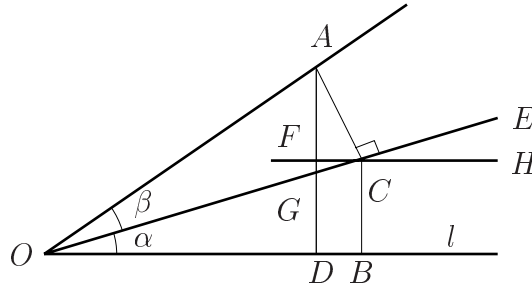
Teorema 2.5.1 $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$.

Veamos otras relaciones útiles entre las funciones trigonométricas. La demostración del siguiente teorema se puede hacer de distintas formas pero aquí daremos una demostración geométrica.

Teorema 2.5.2 *Tenemos las siguientes dos relaciones:*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{sen} \alpha.\end{aligned}$$

Demostración. Sea AD un segmento perpendicular a OB como se muestra en la figura. Consideramos el triángulo rectángulo OAD y el segmento AC perpendicular a la recta OE .



Por definición tenemos que

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OD}{OA} = \frac{OB - BD}{OA} = \frac{OB - CF}{OA}. \quad (2.12)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{OC}{OA}, & \sin \beta &= \frac{AC}{OA} \\ \cos \alpha &= \frac{OB}{OC} & \Rightarrow & OB = OC \cos \alpha.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Los ángulos ECH y α son iguales, ya que ambos están formados por el rayo OE , y la recta l es paralela a FH por construcción. Como AC es perpendicular a OE , tenemos que los triángulos OGD y AGC son semejantes, de donde $\angle \alpha = \angle GAC$. Ahora bien, $\angle \alpha + \angle ACF = 90^\circ$ y $\cos \angle ACF = \sin \alpha$.

Sabemos que,

$$\cos \angle ACF = \frac{CF}{AC} \quad \Rightarrow \quad CF = AC \cos \angle ACF = AC \sin \alpha. \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.13) y (2.14) en (2.12) tenemos que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \frac{OC \cos \alpha - AC \sin \alpha}{OA} \\ &= \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha,\end{aligned}\quad (2.15)$$

como se quería demostrar.

La demostración de la segunda fórmula es análoga.

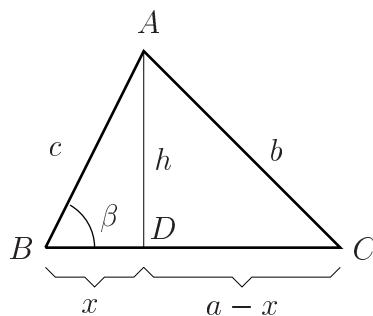
El teorema de Pitágoras nos da una relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Tenemos una propiedad equivalente para un triángulo cualquiera, dada en el siguiente,

Teorema 2.5.3 (Ley de los cosenos) *En un triángulo tenemos que:*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

donde a , b y c son las longitudes de los lados y β el ángulo opuesto al lado b .

Demostración. Trazamos la altura desde el vértice A y llamamos D al pie de la altura. Definimos $x = BD$, por lo tanto $DC = a - x$.



Por el teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos ADC y ABD tenemos que $b^2 = (a - x)^2 + h^2$ y $c^2 = x^2 + h^2$, respectivamente. Desarrollando la primera ecuación tenemos $b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$ y sustituyendo la segunda ecuación obtenemos que $b^2 = a^2 - 2ax + c^2$. Como $\cos \beta = \frac{x}{c}$ tenemos que, $x = c \cos \beta$ y por lo tanto: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.

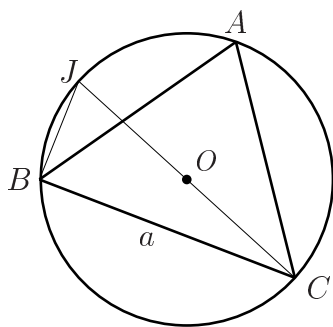
Ejemplo 2.5.4 *Una aplicación directa de la ley de los cosenos es el inverso del teorema de Pitágoras 1.5.6*

En efecto, si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, tenemos por el teorema anterior que $\cos \beta = 0$, pero el coseno de un ángulo es cero cuando el ángulo es de 90° .

La ley de los senos relaciona los ángulos y los lados de un triángulo.

Teorema 2.5.5 (Ley de los senos) *Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de radio R . Si a , b y c son los lados del triángulo opuestos a los vértices A , B y C respectivamente, entonces $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.*

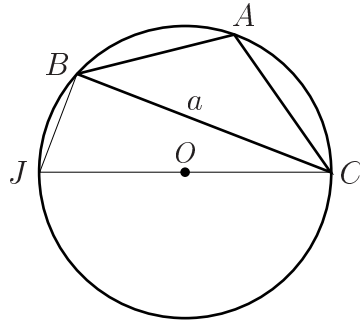
Demostración. Consideramos el triángulo ABC y su circuncírculo que es de radio R . Dibujamos el diámetro CJ y la cuerda BJ .



El ángulo CBJ es un ángulo recto ya que su ángulo central es de 180° . Y tenemos que: $\angle BJC = \angle BAC$, ya que abren el mismo arco, por lo tanto:

$$\text{sen } \angle BAC = \text{sen } \angle BJC = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}.$$

Aplicamos el mismo procedimiento a los otros dos ángulos del triángulo y obtenemos el resultado. En esta demostración consideramos que el ángulo en A no es obtuso, sin embargo en el caso en que el triángulo sea obtusángulo el procedimiento es análogo: consideramos la siguiente figura donde hemos trazado el diámetro CJ .

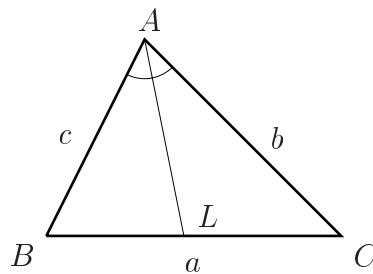


Tenemos que $\angle BJC = 180^\circ - \angle BAC$, ya que los ángulos opuestos en un cuadrilátero cíclico son suplementarios. Recordando que $\text{sen } \theta = \text{sen}(180^\circ - \theta)$ tenemos que el $\text{sen } \angle BJC = \text{sen } \angle BAC$. Por lo tanto, tenemos que

$$\text{sen } A = \text{sen } \angle BAC = \text{sen } \angle BJC = \frac{a}{2R}.$$

Ejemplo 2.5.6 Otra demostración del teorema de la bisectriz 2.2.5, utilizando el teorema anterior.

Consideramos la bisectriz AL del ángulo en A , aplicamos el teorema anterior a los triángulos ABL y ALC .



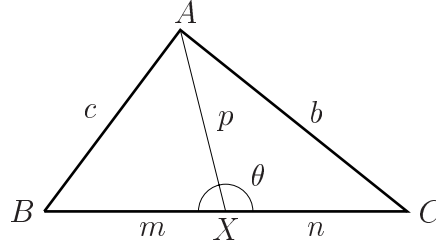
$$\frac{BL}{\sin(\angle BAL)} = \frac{c}{\sin \angle BLA}, \quad \text{y} \quad \frac{LC}{\sin(\angle LAC)} = \frac{b}{\sin \angle ALC}.$$

Como los ángulos BLA y ALC son suplementarios, tienen el mismo seno, por lo tanto al igualar y cancelar, tenemos que:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}.$$

Como una aplicación de la ley de los cosenos tenemos el siguiente:

Teorema 2.5.7 (Teorema de Stewart) Sean ABC un triángulo y AX una ceviana de longitud p , que divide al segmento BC en dos segmentos $BX = m$ y $XC = n$ como se muestra en la figura.



$$\text{Entonces } a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

Demostración. Sea $\theta = \angle CXA$. Por la ley de los cosenos aplicada en los ángulos suplementarios en X tenemos que

$$\begin{aligned} b^2 &= p^2 + n^2 - 2pn \cos \theta \\ c^2 &= p^2 + m^2 - 2pm \cos(180^\circ - \theta). \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por m , la segunda por n , y sumando término a término, tenemos

$$\begin{aligned} b^2m + c^2n &= p^2(n + m) + mn(m + n) - 2mnp(\cos(180^\circ - \theta) + \cos \theta) \\ b^2m + c^2n &= (p^2 + mn)a, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

2.6 Fórmulas del área de un triángulo

En la sección 1.4.1 definimos la forma común para encontrar el área de un triángulo. Aquí damos cuatro formas más de calcular el área de un triángulo.

Teorema 2.6.1 Sea ABC un triángulo con lados de longitud a , b y c . Si s , r y R son el semiperímetro, el inradio y el circunradio del triángulo, respectivamente. Entonces su área la podemos calcular como:

$$1. (ABC) = \frac{ac \sen \angle CBA}{2},$$

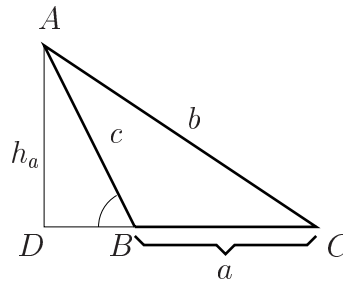
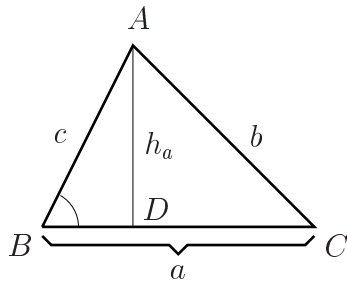
$$2. (ABC) = \frac{abc}{4R},$$

$$3. (ABC) = sr,$$

$$4. (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \text{ Esta expresión se conoce como la fórmula de Herón.}$$

Demostración. 1. Trazamos la altura sobre la base BC desde el vértice A , tenemos dos casos: el pie de la altura D , se encuentra a la derecha de B o a la izquierda de B . En el primer caso $h_a = c \sen \angle CBA$ y en el segundo caso $h_a = c \sen \angle ABD$; pero como $\angle CBA$ y $\angle ABD$ son ángulos suplementarios, tenemos que: $\sen \angle CBA = \sen \angle ABD$, luego en cualquier caso $h_a = c \sen \angle CBA$.

Ahora de ésta última igualdad y del hecho que $(ABC) = \frac{a h_a}{2}$ tenemos que $(ABC) = \frac{ac \sen \angle CBA}{2}$.

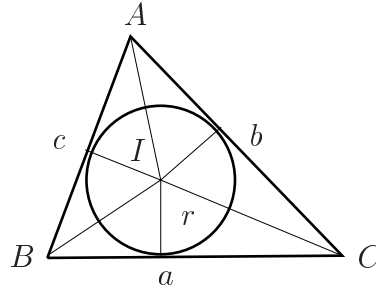


2. El área del triángulo ABC es $(ABC) = \frac{a h_a}{2}$, al sustituir el valor de h_a , dado en la ecuación (2.6), tenemos que: $(ABC) = \frac{abc}{4R}$.

3. Consideramos I el incentro del triángulo ABC y fijémonos en los triángulos ABI , BCI y CAI . El área del triángulo ABC es igual a la suma $(ABI) + (BCI) + (CAI)$. Las áreas de cada uno de los triángulos están dadas por

$(ABI) = \frac{ABr}{2} = \frac{cr}{2}$, $(BCI) = \frac{ar}{2}$ y $(CAI) = \frac{br}{2}$, donde r es el radio del incírculo, entonces:

$$(ABC) = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{ar + br + cr}{2} = \frac{r(a + b + c)}{2} = sr.$$



4. La ecuación (2.10) de la sección 2.5, nos dice que:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

luego, multiplicando por s tenemos:

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (2.16)$$

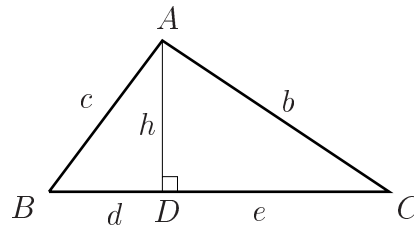
como se quería demostrar.

2.7 Algunas desigualdades geométricas

Un problema que ayuda a ejemplificar el uso de las desigualdades en la geometría apareció en la Olimpiada Internacional de Matemáticas en 1961.

Ejemplo 2.7.1 Si a, b, c son los lados de un triángulo de área (ABC) entonces $4\sqrt{3}(ABC) \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Como un triángulo equilátero de lado a tiene área igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, la igualdad se alcanza en tal caso. Trataremos de comparar lo que sucede en un triángulo cualquiera respecto a lo que pasa en un triángulo equilátero de lado a .



Si AD es la altura del triángulo desde A , su longitud la podemos escribir de la forma $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a + y$, donde y mide su defecto con respecto a la altura del triángulo equilátero. También escribimos $BD = d = \frac{a}{2} - x$ y $DC = e = \frac{a}{2} + x$, donde x se puede interpretar como el defecto que tiene el pie de la altura con respecto al pie de la altura en el caso equilátero (que en este caso es el punto medio del lado BC). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}(ABC) &= a^2 + h^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 - 4\sqrt{3}\frac{ah}{2} \\
 &= \frac{3}{2}a^2 + 2h^2 + 2x^2 - 2\sqrt{3}a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + y\right) \\
 &= \frac{3}{2}a^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + y\right)^2 + 2x^2 - 3a^2 - 2\sqrt{3}ay \\
 &= \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 + 2\sqrt{3}ay + 2y^2 + 2x^2 - 3a^2 - 2\sqrt{3}ay \\
 &= 2(x^2 + y^2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Además la igualdad se da si y sólo si $x = y = 0$ si y sólo si el triángulo es equilátero.

Es común encontrar, entre los problemas de olimpiadas, desigualdades que involucran elementos de un triángulo. Las demostraciones de algunas de ellas se apoyan en la siguiente desigualdad¹, válida para números positivos a, b, c :

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9. \quad (2.17)$$

Además debemos tener presente que se da la igualdad si y sólo si $a = b = c$.

¹La demostración de la desigualdad se sigue al desarrollar el producto $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right)$ y de que la desigualdad entre la media geometría y la media aritmética nos garantiza que $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$.

Otra desigualdad útil para problemas de geometría, es la **desigualdad de Nesbitt**. Esta dice, que para números positivos a, b, c siempre se tiene:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (2.18)$$

La desigualdad anterior se puede demostrar usando la desigualdad (2.17) de la siguiente forma:

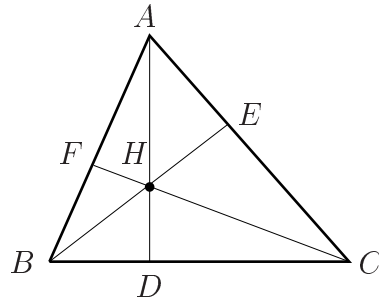
$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ (a+b) + (b+c) + (c+a) \} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \\ &\geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

La igualdad se da si y sólo si $a+b = b+c = c+a$ si y sólo si $a = b = c$. Veamos ahora una aplicación de estas desigualdades.

Ejemplo 2.7.2 En un triángulo ABC con alturas AD , BE , CF y H el ortocentro, sucede que:

- (a) $\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9$,
 (b) $\frac{HD}{HA} + \frac{HE}{HB} + \frac{HF}{HC} \geq \frac{3}{2}$.

Solución.



(a) Sean $S = (ABC)$, $S_1 = (HBC)$, $S_2 = (HCA)$, $S_3 = (HAB)$, es claro que,

$$\frac{HD}{AD} = \frac{S_1}{S}, \quad \frac{HE}{BE} = \frac{S_2}{S}, \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_3}{S},$$

luego $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

Por la desigualdad (2.17) tenemos:

$$\left(\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \right) \left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right) \geq 9.$$

Al sustituir aquí la igualdad que calculamos obtenemos (a).

Además la igualdad se da si y sólo si $\frac{HD}{AD} = \frac{HE}{BE} = \frac{HF}{CF} = \frac{1}{3}$ si y sólo si $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3}S$.

(b) Como, $\frac{HD}{HA} = \frac{HD}{AD-HD} = \frac{S_1}{S-S_1} = \frac{S_1}{S_2+S_3}$ y análogamente $\frac{HE}{HB} = \frac{S_2}{S_3+S_1}$, $\frac{HF}{HC} = \frac{S_3}{S_1+S_2}$, tenemos por la desigualdad de Nesbitt,

$$\frac{HD}{HA} + \frac{HE}{HB} + \frac{HF}{HC} \geq \frac{3}{2}.$$

Muchas veces el trabajo que hay que realizar para resolver una desigualdad es transformarla para llegar a otra desigualdad conocida o evidente. El siguiente ejemplo es ilustrativo, la desigualdad que nos dan la reduciremos a ver que $R \geq 2r$, donde R y r son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita de un triángulo, respectivamente. A esta desigualdad se le conoce como **desigualdad de Euler**. Su validez se desprende de la fórmula de Euler $OI^2 = R^2 - 2rR = R(R - 2r)$ (ver teorema 3.2.6). Claramente, $OI^2 \geq 0$ por lo que $R \geq 2r$. Además $R = 2r$, solamente en el caso de que $O = I$, esto es cuando el triángulo es equilátero.

Ejemplo 2.7.3 Los lados a , b y c de un triángulo cumplen:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

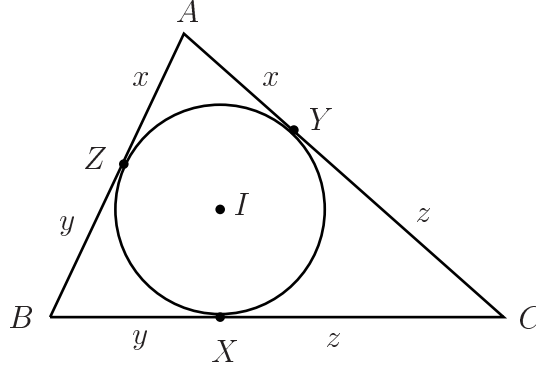
Recordamos que el área de un triángulo ABC , de lados a , b y c , semiperímetro s , inradio r y circunradio R puede expresarse de las siguientes maneras (ver sección 2.6):

$$(ABC) = \frac{abc}{4R} = sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Como $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 8(s-a)(s-b)(s-c)$ tenemos que, la desigualdad es equivalente a $8s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s(abc) = s(ABC) \cdot 4R = 4Rrs^2$, es decir, $8s^2r^2 \leq 4Rrs^2$ de donde $2r \leq R$.

Existe otra demostración basada en la **transformación de Ravi**, que describimos a continuación.

Si el incírculo (I, r) del triángulo ABC tiene contacto con los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y , y Z respectivamente, tenemos que: $x = AZ = YA$, $y = ZB = BX$, $z = XC = CY$.



Es claro que $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, $x = s - a$, $y = s - b$ y $z = s - c$. Continuando con la segunda demostración de la desigualdad, tenemos por un lado que

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 8(s-a)(s-b)(s-c) = 8xyz,$$

y por otro

$$abc = (x+y)(y+z)(z+x),$$

luego la desigualdad es equivalente a:

$$8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x). \quad (2.19)$$

La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética nos garantiza que: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ y $\sqrt{zx} \leq \frac{z+x}{2}$, al multiplicar estas tres desigualdades obtenemos la ecuación (2.19).

Ejemplo 2.7.4 $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Usando la ley de los cosenos tenemos:

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} \\ &= \frac{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) + 2abc}{2abc} \\ &= \frac{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{2abc} + 1,\end{aligned}$$

y como $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc$, se tiene el resultado.

2.8 Ejercicios

En esta sección damos una serie de ejercicios que le permitirán al lector reafirmar y ampliar los conocimientos adquiridos en este capítulo, iniciando con problemas relativamente sencillos cuya dificultad se va incrementando.

Ejercicio 2.8.1 Sean ABC un triángulo, R el circunradio y H el ortocentro. Demuestre que $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

Ejercicio 2.8.2 Sea ABC un triángulo. Sean H , G y O el ortocentro, el centroide y el circuncentro del triángulo ABC y N el circuncentro del triángulo medial. Demuestre que si cualesquiera dos de los siguientes puntos H , G , O o N son iguales el triángulo ABC es equilátero.

Ejercicio 2.8.3 Usando solamente regla, encuentre los puntos medios de dos segmentos paralelos dados.

Ejercicio 2.8.4 Usando solamente regla, construya por un punto dado, una recta paralela a un segmento dado del que se conoce su punto medio.

Ejercicio 2.8.5 Utilice el teorema de Desargues para dar otra prueba de que H , G y O son colineales, donde H , G y O son respectivamente, el ortocentro, el centroide y el circuncentro del triángulo ABC .

Ejercicio 2.8.6 Suponiendo que conoce las longitudes de las medianas de un triángulo encuentre las longitudes de los lados.

Ejercicio 2.8.7 Sean A y B dos puntos fijos. Encuentre el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares de A a todas las rectas posibles que pasan por B .

Ejercicio 2.8.8 Sean A y B dos puntos fijos. Encuentre el lugar geométrico de los puntos reflejados de A con respecto a todas las rectas posibles que pasan por B .

Ejercicio 2.8.9 Sean a , b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c la longitud de la hipotenusa. Encuentre el radio de la circunferencia inscrita, en términos de a , b y c .

Ejercicio 2.8.10 Sea $\mathcal{C}_1$ la circunferencia inscrita en un triángulo cuyo perímetro es 18. Una tangente a $\mathcal{C}_1$ es paralela a un lado del triángulo y la longitud de esta tangente es 2. Muestre que la longitud del lado paralelo es 3 ó 6.

Ejercicio 2.8.11 Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 60^\circ$. Si las bisectrices internas BM y CN se intersectan en I , muestre que $IM = IN$.

Ejercicio 2.8.12 Sea I el incentro del triángulo ABC . Muestre que el centro del circuncírculo del triángulo BIC se encuentra sobre AI .

Ejercicio 2.8.13 Sea ABC un triángulo. Sean M , N puntos sobre los lados CA , AB respectivamente, y O el punto de intersección de BM con CN . Muestre que si $OM = ON$ y $\angle CBM = \angle NCB$, entonces ABC es isósceles.

Ejercicio 2.8.14 En el triángulo ABC el ángulo en A es igual a 36° y $AB = AC$. Muestre que la bisectriz BM del ángulo en B es igual a BC .

Ejercicio 2.8.15 Cada diagonal de un cuadrilátero convexo divide a éste en dos triángulos de la misma área. Muestre que el cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejercicio 2.8.16 ¿Pueden dos bisectrices internas de un triángulo ser perpendiculares?

Ejercicio 2.8.17 Sean a , b y c los lados de un triángulo. Encuentre la longitud de la bisectriz interna, del ángulo $\angle BAC$, en términos de a , b y c .

Ejercicio 2.8.18 Sea $ABCD$ un cuadrado. Por un punto F en el lado AD trazamos el segmento FB y sea $\alpha = \angle AFB$. Desde F trace otro segmento que corte al lado DC en el punto E , de tal forma que el ángulo BFE sea igual a α . Muestre que $AF + EC = FE$.

Ejercicio 2.8.19 Sea ABC un triángulo, con $\angle ABC = 45^\circ$. Desde A trace el segmento AD , con D en BC , de tal forma que: $DC = 2BD$ y el ángulo $BAD = 15^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo BCA ?

Ejercicio 2.8.20 Sea ABC un triángulo tal que $b \cos C = c \cos B$, muestre que el triángulo es isósceles.

Ejercicio 2.8.21 Muestre que entre los rectángulos con perímetro fijo el de mayor área es el cuadrado.

Ejercicio 2.8.22 En un triángulo rectángulo ABC con hipotenusa c y catetos a y b , se cumple que $a + b \leq \sqrt{2}c$.

Ejercicio 2.8.23 En un triángulo ABC se cumple:

- 1) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ y $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$.
- 2) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Ejercicio 2.8.24 Sea ABC un triángulo isósceles y acutángulo con el ángulo BAC igual a 20° . Muestre que: $2BC < AB < 3BC$.

Ejercicio 2.8.25 Sea O un punto dentro del triángulo ABC . Muestre que: $BO + CO < AB + CA$.

Ejercicio 2.8.26 La longitud m_a de la mediana AA' del triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{b+c-a}{2}$.

Ejercicio 2.8.27 Sea ABC un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia de centro O . Las perpendiculares al diámetro BC , trazadas desde O y A , intersectan a la circunferencia en D y P , respectivamente. Si $\angle DCP = 15^\circ$, ¿cuánto vale el $\angle ABC$?

Ejercicio 2.8.28 Tres puntos P , Q y R están en un círculo. Si $PQ = 4$ y $\angle PRQ = 60^\circ$, ¿cuánto mide el radio del círculo?

Ejercicio 2.8.29 Por fuera de los lados AB y CA de un triángulo se construyen los cuadrados $AEDB$ y $ACMK$. Demuestre que EK es el doble de la mediana AA' .

Ejercicio 2.8.30 Sean AD , BE y CF las alturas del triángulo ABC , y AA' , BB' , CC' sus medianas. Muestre que la poligonal $A'EC'DB'FA'$ tiene longitud igual al perímetro de ABC .

Capítulo 3

Geometría del círculo

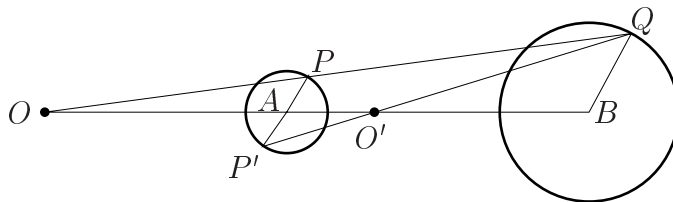
3.1 Homotecia y similitud

3.1.1 Homotecia

Diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son dos **figuras homotéticas** si existen un punto O y una constante $k \neq 0$, de manera que para cada punto F de $\mathcal{F}$ hay un punto F' de $\mathcal{F}'$ tal que O, F, F' están alineados y $\frac{OF'}{OF} = k$. El punto O se llama un **centro de homotecia** y la constante k se conoce como la **razón de homotecia** (k puede ser negativa). La función que asigna a cada punto del plano F un punto F' , alineado con O y F , y que cumpla $\frac{OF'}{OF} = k$, se le llama una **homotecia** de centro O y razón k . Diremos que F y F' son **puntos homólogos**.

Teorema 3.1.1 *Dos circunferencias de centros y radios distintos, son figuras homotéticas.*

Demostración. Sean (A, a) y (B, b) las dos circunferencias (como siempre, (A, a) denota la circunferencia con centro en A y radio a).



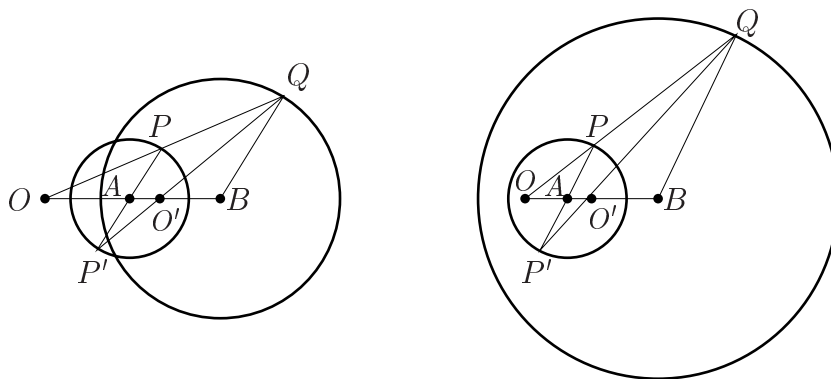
Consideramos Q un punto sobre (B, b) y PP' un diámetro de (A, a) paralelo a BQ . Sean O el punto de intersección de la recta por P y Q con la recta de

los centros (esto es la recta que pasa por A y B) y O' la intersección de $P'Q$ con la recta de los centros.

Como los triángulos OAP y OBQ son semejantes, tenemos que $\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OB} = \frac{AP}{BQ} = \frac{a}{b}$, también los triángulos $O'AP'$ y $O'BQ$ son semejantes, por lo que $\frac{O'P'}{O'Q} = \frac{O'A}{O'B} = \frac{AP'}{BQ} = \frac{a}{b}$. Resaltamos dos hechos: por un lado hemos encontrado dos puntos O y O' sobre la recta de los centros con la propiedad de que $\frac{OA}{OB} = \frac{a}{b}$ y $\frac{O'A}{O'B} = \frac{a}{b}$, y éstos se proponen como centros de homotecia¹ razón de homotecia positiva $\frac{a}{b}$. Por otro lado, para cada punto Q de la circunferencia (B, b) , hemos encontrado puntos P y P' sobre la circunferencia (A, a) que cumplen $\frac{OP}{OQ} = \frac{O'P'}{O'Q} = \frac{a}{b}$, lo que establece que (A, a) y (B, b) son homotéticas desde O y desde O' .

Observaciones 3.1.2 1. Las circunferencias pueden o no intersectarse. También una puede estar contenida en la otra.

2. Para localizar a los puntos O y O' , como lo garantiza el teorema, basta que A y B sean diferentes y que $a \neq b$.



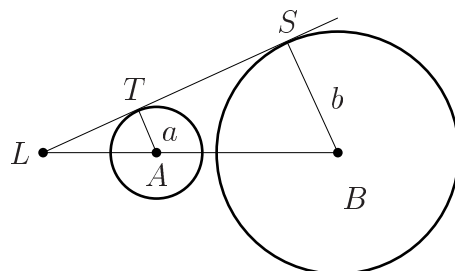
Corolario 3.1.3 Cada tangente común a (A, a) y (B, b) pasa por un centro de homotecia.

Demostración. Supongamos que l es una tangente común externa² a las circunferencias (A, a) y (B, b) , en los puntos T y S respectivamente, y que l

¹Hacemos notar que O es centro de homotecia con razón de homotecia positiva $\frac{a}{b}$, y que O' es centro de homotecia negativa $-\frac{a}{b}$. El signo no aparece en los cálculos donde se ha deducido esto, ya que no consideramos segmentos dirigidos. Pero si podemos afirmar que O' divide internamente a AB en razón $\frac{a}{b}$ y O externamente en la misma razón.

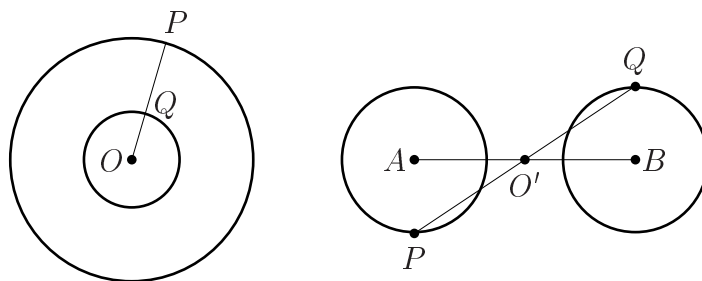
²Una tangente común a dos circunferencias, se dice externa si las dos circunferencias quedan en un mismo semiplano, (de los semiplanos determinados por la recta tangente); si quedan en semiplanos distintos se dirá que es una tangente interna.

intersecta a la recta de los centros en L .

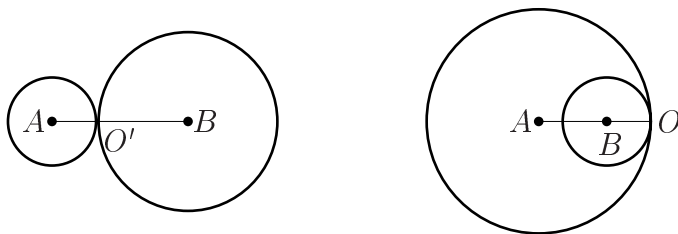


Tenemos que los triángulos rectángulos LAT y LBS son semejantes, por lo que $\frac{LT}{LS} = \frac{LA}{LB} = \frac{a}{b}$. Luego $L = O$, ya que solamente existe un punto que divide externamente al segmento AB en la razón $\frac{a}{b}$. Análogamente, una tangente interna común a las circunferencias debe pasar por el centro de homotecia interno.

Si las circunferencias son concéntricas, el centro común es también centro de homotecia, y es el único, por lo que podemos considerarlo como centro de homotecia interno y externo. Si las circunferencias son del mismo radio, el único centro de homotecia es el punto medio del segmento que une los centros, la razón de homotecia en este caso es $k = -1$.

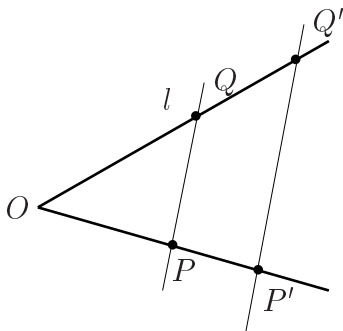


Si las circunferencias son tangentes externas, el punto de contacto es centro de homotecia interno, si las circunferencias son tangentes internas, el punto de contacto es centro de homotecia externo.



Ejemplo 3.1.4 *La homotecia de una recta que no pasa por el centro de homotecia es una recta.*

Sean O el centro de homotecia, k la razón de homotecia, l la recta dada y l' la homotecia de l .



Sean P y Q dos puntos sobre l y sean P' y Q' las homotecias de dichos puntos. Tenemos entonces que:

$$\frac{OP'}{OP} = k \quad y \quad \frac{OQ'}{OQ} = k,$$

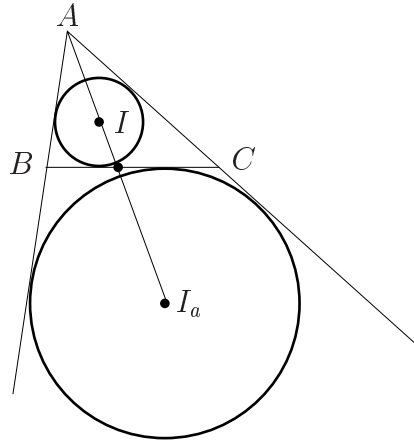
de donde

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ}.$$

Es decir, los triángulos OPQ y $OP'Q'$ son semejantes. Entonces PQ y $P'Q'$ son paralelas. Si mantenemos P fijo y variamos Q , el punto P' también estará fijo y Q' siempre estará sobre la recta paralela a l que pasa por P' , o lo que es lo mismo, l' es una recta.

Ejemplo 3.1.5 *El incírculo (I, r) y el excírculo (I_a, r_a) de un triángulo ABC son homotéticos desde A .*

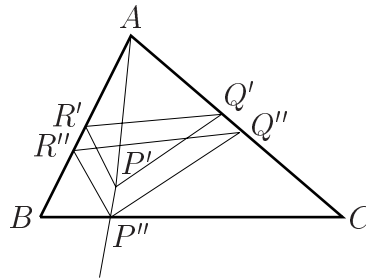
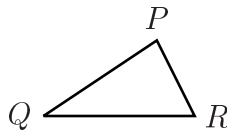
Esto se debe a que CA y AB son tangentes externas comunes a las dos circunferencias. El otro centro de homotecia de estas circunferencias es el punto de intersección de la bisectriz AI con el lado BC , ya que BC es tangente común de las circunferencias y AI es la recta de los centros.



Ejemplo 3.1.6 Sobre un triángulo inscribir un triángulo semejante a uno dado.

Sea ABC el triángulo donde se va a inscribir el triángulo semejante al triángulo dado PQR . Sean Q' y R' puntos sobre CA y AB , respectivamente. Construimos P' de manera que $P'Q'R'$ sea semejante a PQR (una manera de hacer esto, es sobre cada uno de los puntos Q' y R' y del mismo lado de $Q'R'$, construir ángulos iguales a los ángulos en Q y en R del triángulo PQR).

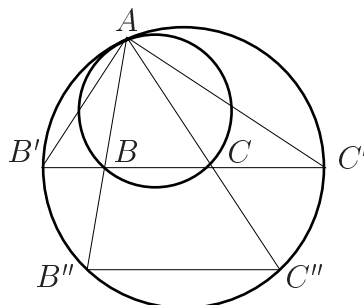
triángulo dado



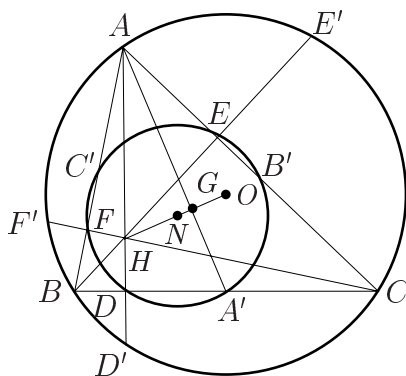
Trazamos la recta por A y P' y llamamos P'' al punto donde ésta corta a BC . Por P'' construimos las paralelas a $P'Q'$ y a $R'P'$, estas cortarían respectivamente a CA en Q'' y a AB en R'' . El triángulo $P''Q''R''$ es semejante a $P'Q'R'$, por ser homotéticos desde A , y entonces semejante a PQR .

Ejemplo 3.1.7 Si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto A y si una secante común intersecta a las circunferencias en B' , B , C y C' , entonces $\angle B'AC = \angle BAC'$.

Si las circunferencias son tangentes en A , sabemos que A es un centro de homotecia. Si B'' y C'' son los puntos homotéticos de B y C , entonces $B''C''$ es paralela a BC y por tanto paralela a $B'C'$, por lo que el arco $B'B''$ es igual al arco $C'C''$. Esta igualdad entre los arcos garantiza que $\angle B'AB'' = \angle C''AC'$, lo que implica que $\angle B'AC = \angle BAC'$.



Ejemplo 3.1.8 Algunas de las propiedades del triángulo medial $A'B'C'$ de un triángulo ABC , se deducen del hecho de que éstos son homotéticos, veamos algunas de ellas.



Primero como los dos triángulos tienen lados paralelos, éstos son homotéticos y la razón de homotecia es $1 : 2$. Luego, podemos concluir que: AA' , BB' y CC' son concurrentes en un punto G , G es un centro de homotecia y $\frac{GA}{GA'} = \frac{GB}{GB'} = \frac{GC}{GC'} = 2$, ya que la razón de homotecia es 2. Como el centro O del circuncírculo de ABC es el ortocentro de $A'B'C'$, este punto es el homólogo al ortocentro H del triángulo ABC , lo que muestra que H, G y O son colineales y que $GH = 2GO$.

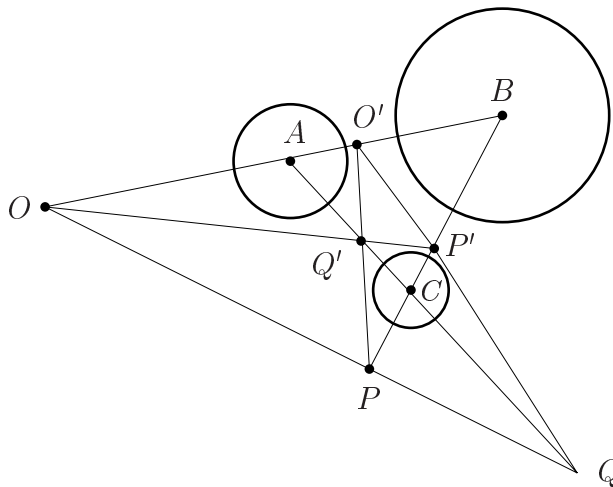
El circuncírculo de $A'B'C'$ tiene radio $R/2$, ya que es homotético al circuncírculo de ABC , y su centro N es el homólogo del circuncentro O , por lo

que $GO = 2GN$. Luego, H , N , G y O son colineales y N es punto medio de HO . Lo anterior garantiza que G y H dividen al segmento NO interna y externamente en la razón $1 : 2$, por lo que son los centros de homotecia de los circuncírculos de $A'B'C'$ y ABC .

El circuncírculo de $A'B'C'$ deberá pasar por los puntos medios de AH , BH y CH , ya que H es el centro de homotecia externo. Y por esta misma razón los simétricos de H con respecto a los lados se deberán encontrar sobre el circuncírculo.

Ejemplo 3.1.9 *Tres circunferencias (A, a) , (B, b) y (C, c) con radios diferentes, cuyos centros forman un triángulo, tienen seis centros de homotecia, que se encuentran por tercias sobre cuatro rectas.*

Este resultado es inmediato del teorema de Menelao y de la observación de que la razón en que un centro de homotecia divide al segmento que une los centros de dos circunferencias, es igual a la razón de los radios de las circunferencias respectivas.



Damos otra justificación, debida a Monge, de que los centros de homotecia externos de las tres circunferencias son colineales.

Si las tangentes externas de A y B se intersectan en O , las tangentes externas de B y C se intersectan en P y las tangentes externas de C y A se intersectan en Q , tenemos que O , P y Q son los centros de homotecia externos de A y B , B y C y de C y A , respectivamente. Si giramos alrededor del eje OAB ,

obtenemos un cono $\mathcal{O}$ de vértice O ; las circunferencias A y B al girar, generan esferas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tangentes al cono $\mathcal{O}$. De manera análoga al girar PBC y QCA obtenemos otros dos conos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de vértices P y Q respectivamente y cada uno conteniendo a dos esferas: $\mathcal{P}$ a las esferas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, y $\mathcal{Q}$ a las esferas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$. Tomemos ahora un plano que sea tangente a las esferas y que las deje de un mismo lado, por ejemplo un plano que sirva como mesa donde las esferas estén descansando. Si las esferas quedan de un mismo lado del plano, digamos arriba de la mesa; es claro que los conos también son tangentes al plano y también quedan del mismo lado que las esferas. Pero si hay un plano tangente a las esferas, existe otro plano también tangente a las esferas y que deja a las esferas de un mismo lado, digamos un plano que cubre las esferas. En la intersección de los planos, que es una recta, se encuentran los vértices de los conos, esto es O, P y Q son colineales.

3.1.2 Similitud

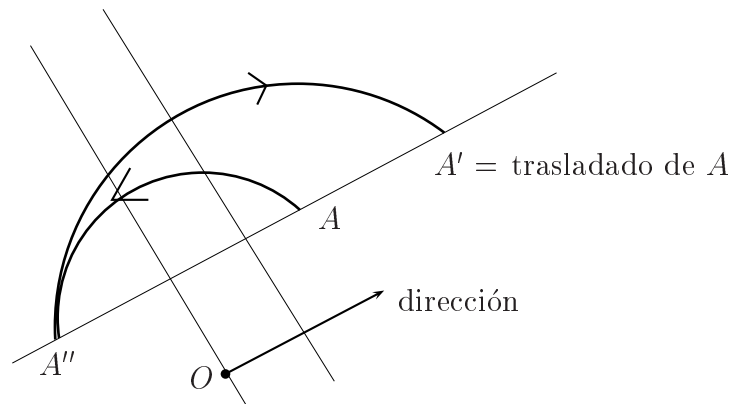
La geometría no solamente se restringe al estudio de las propiedades que encierra una figura o los elementos geométricos de ésta, sino que también busca relacionar diferentes figuras, así como encontrar características que señalen las diferencias entre ellas. Por ejemplo, hemos hablado de triángulos congruentes y de figuras homotéticas. Una herramienta poderosa en las matemáticas y en particular en la geometría, son las **transformaciones geométricas**, entendiendo a éstas como funciones del plano (o parte de él) en sí mismo. Algunas de estas transformaciones geométricas son las **isometrías**, que son las transformaciones que conservan la distancia (euclidea), así si dos puntos A y B guardan una distancia AB , sus imágenes $A' = T(A)$ y $B' = T(B)$ cumplen que su distancia es igual a AB (esto es: $A'B' = AB$). Ejemplos clásicos de isometrías son:

- (i) Las **traslaciones**, en éstas todos los puntos se mueven la misma distancia en una misma dirección.
- (ii) Las **rotaciones**, aquí todos los puntos se mueven girando el mismo ángulo llamado **ángulo de rotación**, alrededor de un punto fijo denominado el **centro de rotación**.
- (iii) Las **reflexiones** en una recta, cada punto se mueve a su punto simétrico con respecto a la recta llamada **recta de reflexión**.

Ejemplo 3.1.10 *Una traslación es la composición de dos reflexiones.*

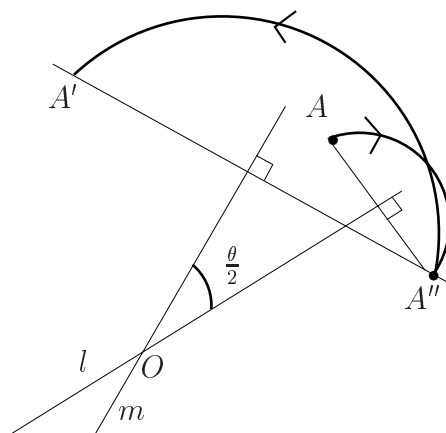
Tomemos dos rectas perpendiculares a la dirección de traslación y alejadas

una de la otra una distancia igual a la mitad de la distancia de traslación. Si reflejamos primero en la recta que pasa por el origen O de la dirección y después en la otra recta paralela, obtendremos la traslación. El siguiente dibujo es convincente.



Ejemplo 3.1.11 *Una rotación es la composición de dos reflexiones.*

Supongamos que queremos una rotación de ángulo θ en sentido positivo, es decir, en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj. Tomemos dos rectas l y m que pasen por el centro de rotación O y con ángulo de l a m igual a $\frac{\theta}{2}$. Si reflejemos primero en l y después en m , obtenemos la rotación de ángulo θ . El dibujo, también es convincente.



El siguiente resultado nos garantiza que las reflexiones bastan para generar las isometrías, su demostración escapa de los propósitos del libro, se presenta únicamente para resaltar la importancia que tienen las reflexiones en la geometría.

Teorema 3.1.12 *Toda isometría del plano es composición de 1, 2 ó 3 reflexiones.*

Una **similitud** del plano es la composición de una rotación seguida de una homotecia, con centro de homotecia igual al centro de rotación. El **centro de similitud** es el centro de rotación O (que también es el centro de la homotecia) y la **razón de similitud** es la razón de homotecia k . Pediremos que $k > 0$ y $k \neq 1$.

Una similitud T con centro de similitud O cumple que: para cualquier punto A y su similar $A' = T(A)$, se tiene: $OA' = kOA$. (Ya que para A y su rotado A'' , sucede que $OA = OA''$).

Señalamos que la distinción de una homotecia de centro O y razón k , con una similitud con el mismo centro y misma razón, radica en que en la homotecia se pide que O , A y A' sean siempre colineales, no así en la similitud.

Dos figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son **similares** si existe una similitud que transforma una en la otra.

Teorema 3.1.13 *Dos circunferencias de centros y radios distintos son similares desde una infinidad de puntos; éstos centros de similitud forman una circunferencia llamada **circunferencia de similitud**.*

Demostración. Sean (A, a) y (B, b) las dos circunferencias. Ya conocemos dos centros de similitud: los dos centros de homotecia, la razón de homotecia o similitud en ambos casos es $\frac{a}{b}$.

Si P es un centro de similitud, entonces hay una rotación que transforma (B, b) en una circunferencia (B', b) que es homotética a (A, a) desde P y con razón de similitud $\frac{a}{b}$, por lo que $\frac{PA}{PB'} = \frac{a}{b}$, pero como $PB' = PB$, tenemos que: $\frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}$.

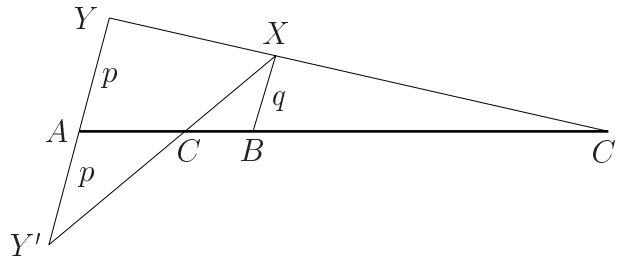
Recíprocamente, un punto P que satisface $\frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}$, es un centro de similitud. En efecto basta observar que si giramos con un ángulo $\theta = \angle APB$ a la circunferencia (B, b) , obtenemos una circunferencia (B', b) que es homotética desde P a la circunferencia (A, a) .

Como conclusión del teorema anterior tenemos que, los centros de similitud entre las circunferencias (A, a) y (B, b) , es el conjunto de puntos P que satisfacen $\frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}$, que es una circunferencia como se muestra en la siguiente

Proposición 3.1.14 Si A, B son dos puntos fijos y $\frac{p}{q}$ es una razón fija, el lugar geométrico de los puntos P que satisfacen $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q}$ es una circunferencia, conocida como una **circunferencia de Apolonio**.

Demostración. Primero observaremos que sobre la recta AB hay exactamente dos puntos del lugar geométrico (si p/q no es 1). Por A y B trazamos segmentos paralelos YY', BX con $BX = q, YA = AY' = p$.

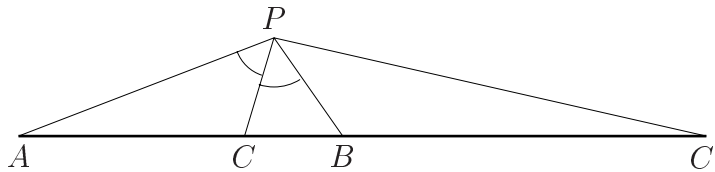
Sean C y C' las intersecciones de XY' y XY con AB .



Como los triángulos $AY'C$ y BXC son semejantes tenemos $\frac{AC}{CB} = \frac{AY'}{BX} = \frac{p}{q}$.

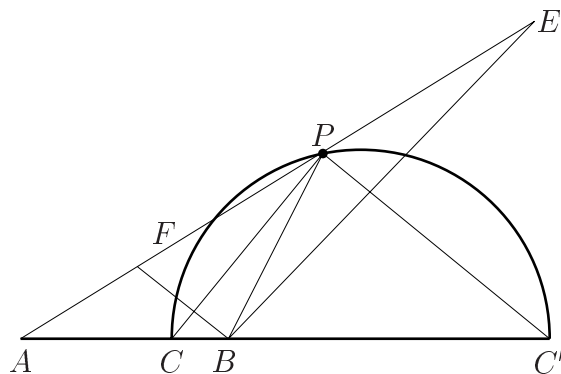
Como también son semejantes los triángulos $AC'Y$ y $BC'X$ entonces $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AY}{XB} = \frac{p}{q}$. Luego C y C' pertenecen al lugar geométrico.

Supongamos que P es un punto del lugar geométrico, entonces $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q} = \frac{AC}{CB}$, por tanto PC es la bisectriz interna del ángulo $\angle APB$ y como $\frac{AP}{PB} = \frac{p}{q} = \frac{AC'}{C'B}$ tenemos que PC' es bisectriz externa del mismo ángulo, esto nos garantiza que P se encuentra sobre la circunferencia de diámetro CC' .



Recíprocamente, consideramos un punto P sobre la circunferencia de diámetro CC' , demostraremos que se encuentra sobre el lugar geométrico. Por el punto B trazamos paralelas BE, BF a las rectas PC y PC' de manera que se

intersecten con AP en E y F respectivamente. Como los triángulos ACP y ABE son semejantes con lados paralelos, por el teorema de Thales tenemos que $\frac{AP}{PE} = \frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}$. La misma razón aplicada a los triángulos semejantes ABF y $AC'P$ nos asegura que $\frac{AP}{PF} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{p}{q}$. De lo anterior tenemos que $PF = PE$, es decir P es el punto medio de EF y como el triángulo EBF es rectángulo $PB = PE$. Por lo tanto, $\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PE} = \frac{p}{q}$, lo que implica que P está en el lugar geométrico.



Observaciones 3.1.15 1. El lugar geométrico anterior se puede construir con regla y compás, basta localizar C y C' , y luego su punto medio, que será el centro del círculo.

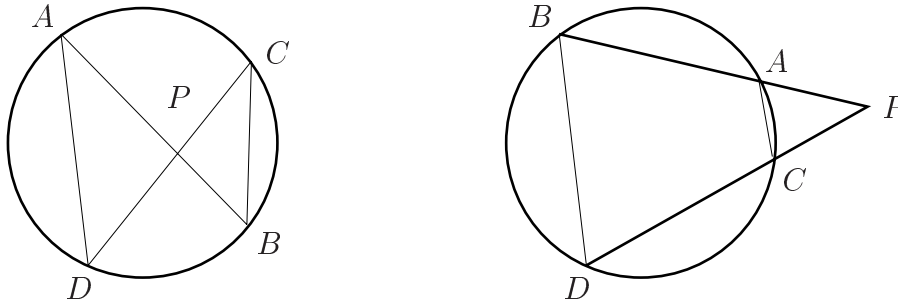
2. Si $p = q$, el lugar geométrico degenera en una recta: la mediatriz del segmento AB .

3.2 Potencia

Proposición 3.2.1 Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia, se intersectan en un punto P , entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Demostración. Si el punto de intersección se encuentra sobre la circunferencia, ambos miembros de la ecuación son cero y la igualdad es inmediata. Supongamos que P se encuentra en el interior de la circunferencia. Los triángulos PAD y PCB son semejantes ya que los ángulos $\angle PAD$ y $\angle PCB$

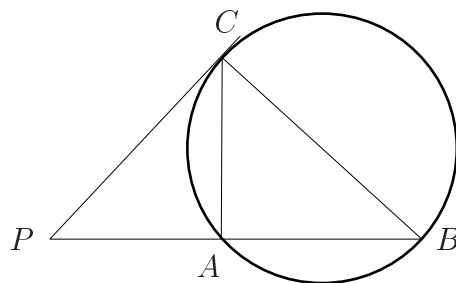
son iguales por abrir el mismo arco, de igual manera por abrir el mismo arco los ángulos $\angle PDA$ y $\angle PBC$ son iguales. Por tanto $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ y entonces: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



Si P se encuentra fuera de la circunferencia tenemos, por ser el cuadrilátero $ACDB$ es cíclico, $\angle PAC = \angle PDB$ y $\angle PCA = \angle PBD$. Por lo tanto, los triángulos PAC y PDB son semejantes y $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Proposición 3.2.2 Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C , intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB , entonces $PC^2 = PA \cdot PB$.

Demostración. Sabemos que el ángulo seminscrito es igual al ángulo inscrito que abre el mismo arco, esto es $\angle ACP = \angle CBP$ y como $\angle CPA = \angle BPC$, tenemos que los triángulos PCA y PBC son semejantes, por tanto $\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PC}$, luego $PC^2 = PA \cdot PB$.



Ahora veamos los recíprocos de las proposiciones anteriores:

Proposición 3.2.3 1. Si AB, CD son dos segmentos que se intersectan en P de manera que, como segmentos dirigidos, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ entonces A, B, C y D se encuentran sobre una circunferencia.

2. Si A, B, C y P son puntos de manera que P, A, B están alineados y $PC^2 = PA \cdot PB$, entonces PC es tangente en C al circuncírculo del triángulo ABC .

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el circuncírculo del triángulo ABC .

1. Sea D' la intersección de PC con $\mathcal{C}$. Por la proposición 3.2.1, $PA \cdot PB = PC \cdot PD'$ y como por hipótesis $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, se tiene que $PD' = PD$, por lo que $D' = D$. Luego A, B, C y D se encuentran sobre una circunferencia.

2. Sea C' la intersección de PC con $\mathcal{C}$. Por la primera proposición 3.2.1 $PA \cdot PB = PC \cdot PC'$ y como por hipótesis $PA \cdot PB = PC^2$, se tiene que $PC' = PC$ y entonces $C' = C$, por lo que PC es tangente en C al circuncírculo del triángulo ABC .

En resumen tenemos para un punto P , una circunferencia $\mathcal{C}$ y cualquier recta por P que corte a $\mathcal{C}$ en puntos A y B (con la posibilidad de $A = B$) que: $PA \cdot PB$ es constante. Esta cantidad constante se conoce como la **potencia del punto P respecto a $\mathcal{C}$** .

Resaltamos que si PC es la tangente a $\mathcal{C}$ por P , la potencia es PC^2 . Llamamos O al centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ y radio r , tenemos por el teorema de Pitágoras que: $PC^2 = PO^2 - r^2$. Ahora bien, si P es un punto dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$ y AB es una cuerda por P , entonces la potencia de P es $PA \cdot PB$. Si pensamos PA y PB como segmentos dirigidos, tenemos que éstos tienen signos opuestos, por lo que la potencia es negativa y su magnitud la podemos calcular al trazar el diámetro por P , la magnitud de la potencia es: $PA \cdot PB = (r - PO)(r + PO) = r^2 - PO^2$. Así, para este caso, también la potencia resulta ser $PO^2 - r^2$. Finalmente para un punto P sobre la circunferencia, sabemos que la potencia es cero, esto también coincide con $PO^2 - r^2$.

En conclusión podemos decir que la potencia de P con respecto a la circunferencia $\mathcal{C} = (O, r)$ es $PO^2 - r^2$. Y la potencia será positiva, cero o negativa dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.

Ejemplo 3.2.4 ¿Cuáles son los puntos P para los que la potencia a la circunferencia $\mathcal{C} = (O, r)$ es igual a la potencia a la circunferencia $\mathcal{C}' = (Q, s)$?

La potencia de P a $\mathcal{C} = (O, r)$ es $PO^2 - r^2$ y la potencia de P a $\mathcal{C}' = (Q, s)$ es $PQ^2 - s^2$, luego buscamos los puntos P que cumplan, $PO^2 - r^2 = PQ^2 - s^2$,

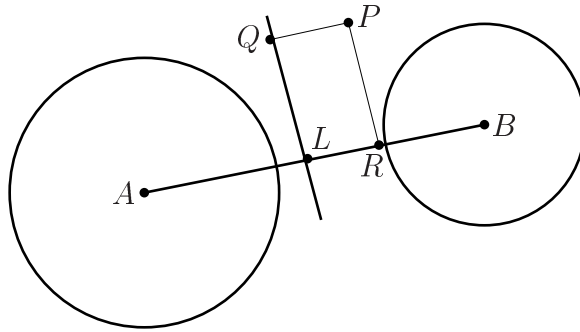
esto es los puntos que satisfacen: $PO^2 - PQ^2 = r^2 - s^2$. Pero sabemos que este conjunto de puntos es una recta perpendicular a OQ (compare con el lema 1.5.7).

Este lugar geométrico se conoce como el **eje radical** de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. En el caso que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se intersecten, como los puntos de intersección tienen potencia igual a cero para ambas circunferencias, se tiene que estos puntos forman parte del lugar geométrico, por lo que en este caso el eje radical pasa por los puntos de intersección de las circunferencias.

Finalmente resaltamos el hecho de que cada punto P del eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ cumple que las longitudes de las tangentes desde P a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, cuando existen, son iguales.

Ejemplo 3.2.5 *La diferencia de potencias de un punto con respecto a dos circunferencias no concéntricas es dos veces el producto de la distancia entre los centros por la distancia del punto al eje radical.*

Sean (A, a) y (B, b) las circunferencias y P el punto. Denotemos por Q y R los pies de las perpendiculares desde P al eje radical y a la recta que une los centros, respectivamente. Sea L la intersección del eje radical con la recta de los centros.



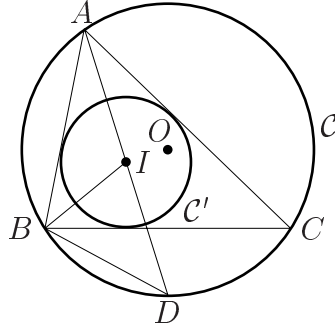
Recordamos que por estar L en el eje radical se tiene que: $AL^2 - a^2 = BL^2 - b^2$. Entonces³,

³En las igualdades que siguen consideramos los segmentos como segmentos dirigidos.

$$\begin{aligned}
\text{diferencia de potencias} &= (PA^2 - a^2) - (PB^2 - b^2) = \\
&= AR^2 - BR^2 + BL^2 - AL^2 = \\
&= (AB + BR)^2 - BR^2 + BL^2 - (AB + BL)^2 = \\
&= 2AB \cdot BR - 2AB \cdot BL = \\
&= 2AB \cdot LR.
\end{aligned}$$

Teorema 3.2.6 (Fórmula de Euler) *Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo con circuncírculo (O, R) e incírculo (I, r) es la igualdad: $OI^2 = R^2 - 2Rr$.*

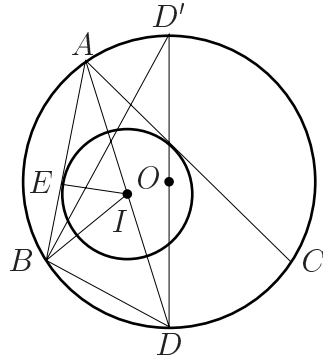
Demostración. Sea A un punto sobre el circuncírculo $\mathcal{C}=(O, R)$, sean B y C los puntos de intersección del circuncírculo $\mathcal{C}$ con las tangentes desde A al círculo $\mathcal{C}'=(I, r)$. El triángulo admite a $\mathcal{C}'$ como incírculo si y sólo si BC es tangente a $\mathcal{C}'$, si y sólo si $\angle ABI = \angle IBC$.



Sea D el punto de intersección de la recta AI con el círculo $\mathcal{C}$. Como AI es bisectriz, tenemos que: $\angle IAB = \angle CAI$. Además $\angle CAI = \angle CBD$, ya que ambos ángulos abren el mismo arco CD , luego $\angle IAB = \angle CBD$.

Como el ángulo $\angle BID$ es un ángulo exterior del triángulo ABI , tenemos que: $\angle IAB = \angle BID - \angle ABI$. Además como $\angle CBD = \angle IBD - \angle IBC$, y $\angle IAB = \angle CBD$ obtenemos que $\angle BID - \angle ABI = \angle IBD - \angle IBC$. Luego la condición $\angle ABI = \angle IBC$ es verdadera si y sólo si $\angle BID = \angle IBD$. Pero estos dos ángulos, son los ángulos opuestos a los lados BD y ID del triángulo IBD .

Podemos reformular el problema como sigue: El triángulo ABC admite a $\mathcal{C}' = (I, r)$ como incírculo si y sólo si $BD = ID$.



Sea E el punto de tangencia del círculo C' con AB y D' el punto diametralmente opuesto a D en C . Como los triángulos rectángulos AIE y $D'DB$ tienen los ángulos IAE y $DD'B$ iguales por abrir el mismo arco BD , resulta que son semejantes. Esta semejanza nos garantiza que $\frac{AI}{IE} = \frac{D'D}{DB}$, por lo que: $AI \cdot DB = 2Rr$.

Al tomar la potencia del punto I con respecto al círculo C , tenemos: $AI \cdot ID = (R - d)(R + d)$, donde $d = OI$. De las dos últimas igualdades obtenemos:

$$\frac{DB}{ID} = \frac{2Rr}{(R - d)(R + d)} = \frac{2Rr}{(R^2 - d^2)}.$$

Luego, $BD = ID$ si y sólo si $R^2 - d^2 = 2Rr$.

Observación 3.2.7 *La demostración de la fórmula de Euler, nos muestra que si D es el punto donde la bisectriz interna AI intersecta al circuncírculo de ABC , este punto sirve de centro de una circunferencia que pasa por B, C e I . En otras palabras D es el circuncentro del triángulo BCI .*

Con la ayuda de la observación anterior y usando el teorema de Pitágoras podemos dar otra demostración de la fórmula de Euler:

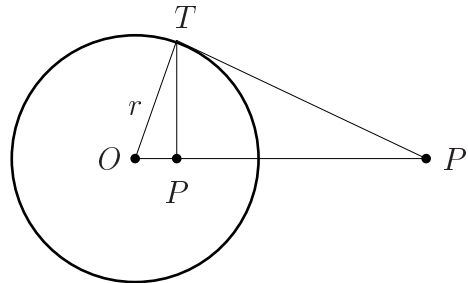
Sean M el punto medio de BC y Q la proyección ortogonal de I sobre el radio OD . Entonces⁴,

$$\begin{aligned} OB^2 - OI^2 &= OB^2 - DB^2 + DI^2 - OI^2 \\ &= OM^2 - MD^2 + DQ^2 - QO^2 \\ &= (MO + DM)(MO - DM) + (DQ + QO)(DQ - QO) \\ &= OD(OM - MD - DQ + QO) \\ &= R(2QM) = 2Rr \end{aligned}$$

⁴En las igualdades que siguen consideramos los segmentos como segmentos dirigidos.

encuentra dentro de $\mathcal{C}$ y el otro fuera.

(iv) Si P' está fuera de $\mathcal{C}$ y T es un punto sobre $\mathcal{C}$ de manera que $P'T$ es tangente a $\mathcal{C}$, entonces el pie de la perpendicular de T sobre OP' es P el inverso de P' . (Este hecho se sigue de que los triángulos OTP' y OPT son semejantes).

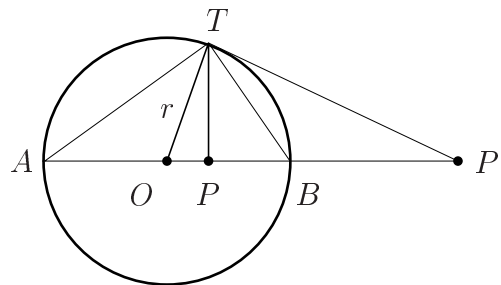


(v) Si P está dentro de $\mathcal{C}$ y T es la intersección de la perpendicular a OP por P con la circunferencia, entonces la tangente a $\mathcal{C}$ por T intersecta a OP en P' el inverso de P .

(vi) Con la ayuda de (iv) y (v) es claro como construir con regla y compás el inverso de un punto.

(vii) Para el punto O no hay inverso.

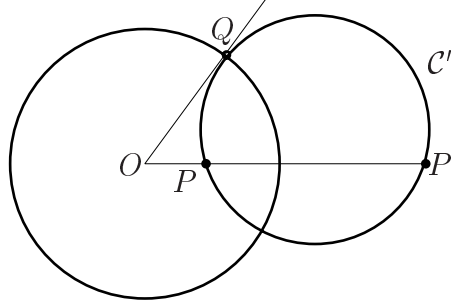
(viii) Si A y B son los extremos de un diámetro de (O, r) entonces los puntos P y P' son **conjugados armónicos** con respecto a A y B , esto es: $\frac{AP}{PB} = -\frac{AP'}{P'B}$.



Como uno de los puntos $\{P, P'\}$ está dentro de $\mathcal{C}$ y el otro fuera, veremos la igualdad solamente en términos de magnitudes.

$$\begin{aligned}
\frac{AP}{PB} = -\frac{AP'}{P'B} &\Leftrightarrow \frac{r + OP}{r - OP} = \frac{r + OP'}{OP' - r} \\
&\Leftrightarrow (r + OP)(OP' - r) = (r + OP')(r - OP) \\
&\Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2.
\end{aligned}$$

(ix) Toda circunferencia que pasa por dos puntos inversos P y P' es ortogonal a la circunferencia de inversión $\mathcal{C}^5$



Sea Q uno de los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con una circunferencia $\mathcal{C}'$ que pase por P y P' . (¿Porqué existe tal Q ?) Como $OP \cdot OP' = r^2 = OQ^2$, (considerando la potencia de O con respecto a $\mathcal{C}'$), por lo tanto OQ es tangente a $\mathcal{C}'$. Luego, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son ortogonales.

(x) Sea $\mathcal{C}'$ es una circunferencia ortogonal a $\mathcal{C}$. El inverso P' , de un punto P de $\mathcal{C}'$, se encuentra también en $\mathcal{C}'$.

Sean P en $\mathcal{C}'$ y P' el punto de intersección de la recta por OP con $\mathcal{C}'$. Para Q el punto común de las circunferencias ortogonales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, se tiene que OQ es tangente a $\mathcal{C}'$. Como la potencia de O con respecto a $\mathcal{C}'$ es $OQ^2 = OP \cdot OP'$, tenemos que P y P' son puntos inversos.

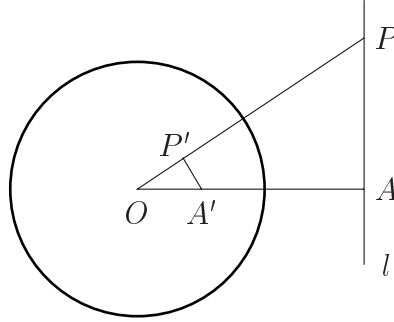
Teorema 3.3.1 Sea $\mathcal{C} = (O, r)$ una circunferencia de inversión.

- (i) Una recta que pasa por O , se invierte en ella misma.
- (ii) El inverso de una recta que no pasa por O , es una circunferencia que pasa por O .
- (iii) El inverso de una circunferencia que pasa por O , es una recta que no pasa por O .

⁵Decimos que dos circunferencias son ortogonales si las tangentes en los puntos de intersección de éstas son ortogonales.

Demostración. (i) Para una recta l que pasa por O , es claro que el inverso de un punto P de l , se encuentra sobre l . Recuerde que O es el único punto que no tiene inverso, por lo que en realidad estamos hablando de invertir la recta l sin el punto O .

(ii) Sean l una recta que no pasa por O , A el pie de la perpendicular de O sobre l y A' el inverso de A .

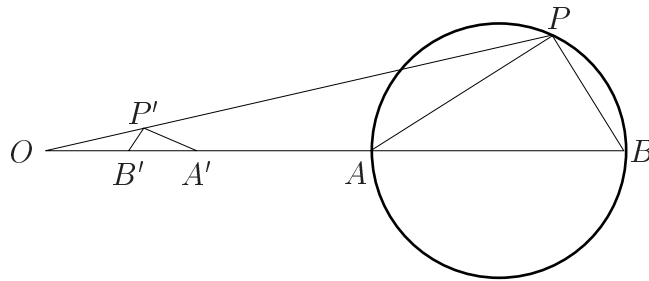


Sean P un punto de l y P' su inverso, como $OP \cdot OP' = OA \cdot OA'$, los triángulos OAP y $OP'A'$ son semejantes. Pero OAP es un triángulo rectángulo con ángulo recto en A , luego el triángulo $OP'A'$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en P' , por lo que P' se encuentra sobre la circunferencia de diámetro fijo OA' . Recíprocamente cualquier punto P' de tal circunferencia es inverso del punto de intersección del rayo OP' con la recta l . Así el inverso de l es la circunferencia de diámetro OA' (desde luego sin incluir a O).

(iii) Basta seguir los pasos inversos de la demostración de (ii).

Teorema 3.3.2 *El inverso de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión O es una circunferencia que no pasa por O .*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de diámetro AB y P un punto de $\mathcal{C}$. Sean también A', B' y P' los inversos de A, B y P . Entonces, $OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$.



Como $\frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}$ y $\frac{OB}{OP} = \frac{OP'}{OB'}$, tenemos que los triángulos OAP y $OP'A'$ son semejantes, al igual que la pareja de triángulos OBP y $OP'B'$. De donde, $\angle OPA = \angle OA'P'$ y $\angle OBP = \angle OP'B'$. Pero como

$$\begin{aligned} \angle POB + \angle OBP + \angle APO + 90^\circ &= 180^\circ \\ \text{y} \quad \angle P'OB' + \angle OA'P' + \angle A'P'B' + \angle OP'B' &= 180^\circ \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones y cancelando los términos iguales, tenemos que $\angle A'P'B' = 90^\circ$. Por lo tanto, P' se encuentra sobre la circunferencia de diámetro fijo $A'B'$.

Recíprocamente cualquier punto P' de la circunferencia de diámetro $A'B'$ es punto inverso del punto de intersección del rayo OP' con la circunferencia $\mathcal{C}$.

El **ángulo entre dos circunferencias** que se intersectan es igual al ángulo que forman las rectas tangentes a las circunferencias en el punto de intersección. Si hay dos puntos de intersección, la simetría de la figura implica, que el ángulo en cada punto de intersección es el mismo. Si solamente hay un punto de intersección, las circunferencias tienen en el punto la misma tangente por lo que el ángulo de intersección es cero. Decimos en este caso que las **circunferencias son tangentes**.

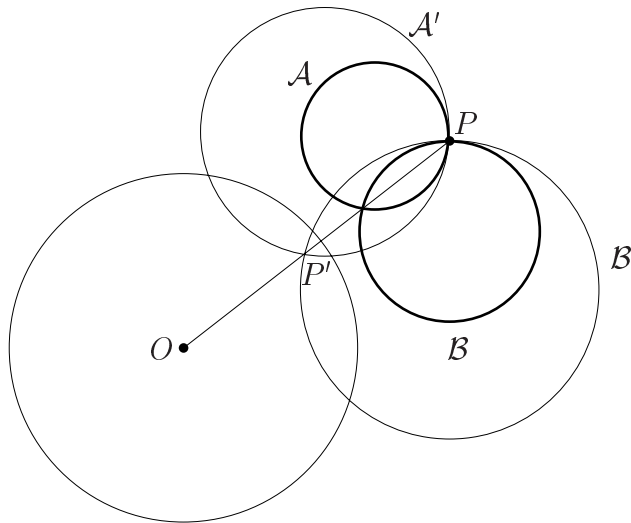
Dada una circunferencia $\mathcal{C}$ y un punto P de $\mathcal{C}$, para cualquier punto Q del plano, existe una circunferencia que pasa por Q y es tangente en P a la circunferencia $\mathcal{C}$. Si Q se encuentra sobre la tangente a $\mathcal{C}$ por P , convenimos que la circunferencia tangente es l , la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P . Si Q se encuentra en la perpendicular por P a la tangente l , la circunferencia que buscamos es la que tiene diámetro QP . En cualquier otro caso la circunferencia que buscamos es la que tiene centro en la intersección de la mediatriz de QP con la perpendicular por P a la tangente l . Resaltamos que las circunferencias de esta familia, son todas tangentes entre sí en el punto P .

El **ángulo entre dos curvas** que se intersectan en un punto P es por definición el ángulo entre las rectas tangentes a las curvas en P , siempre y cuando existan las tangentes. Por lo dicho en el párrafo anterior el ángulo es también igual al que se forma entre cualesquiera dos circunferencias que admiten a tales rectas como rectas tangentes en P .

Teorema 3.3.3 *La inversión es una transformación que conserva ángulos.*

Demostración. Sin perder generalidad podemos tomar dos circunferencias $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que se intersecten en un punto P . Sea P' el punto inverso de P y sean $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ otras dos circunferencias de manera que:

- (i) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ tengan una tangente común en P .
- (ii) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tengan una tangente común en P .
- (iii) $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ pasen por P' .



Las circunferencias $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$, por pasar por los puntos inversos P y P' , son ortogonales a la circunferencia de inversión, y entonces quedan invariantes bajo la inversión. Luego el ángulo entre las curvas en P es el mismo ángulo entre las curvas inversas en P' .

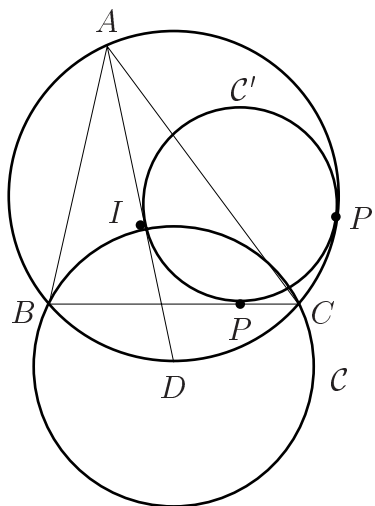
Corolario 3.3.4 *Circunferencias ortogonales se invierten en circunferencias ortogonales.*

El teorema 3.3.2, nos garantiza que la inversa de una circunferencia $\mathcal{C}(Q)$ que no pasa por el centro de inversión O , es una circunferencia que no pasa por O . El teorema no menciona nada sobre los centros de las circunferencias, quisiéramos únicamente enfatizar que el inverso del centro Q no es el centro de la circunferencia inversa. Con la ayuda del corolario anterior, podemos encontrar el inverso del centro Q de la circunferencia $\mathcal{C}$: como las rectas

por Q cortan ortogonalmente a $\mathcal{C}$, estas rectas se invierten en circunferencias que pasan por el centro de inversión O y el inverso Q' de Q . Como las circunferencias por O y Q' cortan a la inversa de $\mathcal{C}$ ortogonalmente, el inverso de Q debe ser el inverso de O con respecto a la circunferencia inversa de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 3.3.5 Sea ABC un triángulo con incentro I . Una circunferencia tangente a BC y a AI en I es también tangente al circuncírculo de ABC .

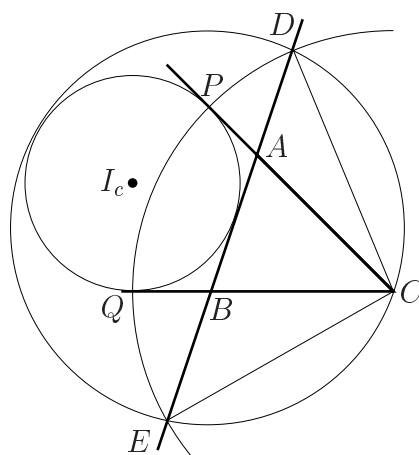
Sea $\mathcal{C}'$ la circunferencia tangente a BC y AI . Sea D el punto de intersección de la bisectriz AI con el circuncírculo de ABC .



Sabemos que la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro D y radio DI pasa por B y C . Como DI es tangente a $\mathcal{C}'$, tenemos que las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son ortogonales. Luego, al invertir con respecto a la circunferencia $\mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{C}'$ es su propia inversa, la inversa de la recta por B y C es el circuncírculo de ABC y como el ser tangentes se debe conservar, resulta que $\mathcal{C}'$ y el circuncírculo de ABC son tangentes.

Ejemplo 3.3.6 Sea ABC un triángulo con semiperímetro s . Sean D y E puntos sobre AB de manera que $CD = CE = s$. El excírculo (I_c, r_c) de ABC es tangente al circuncírculo del triángulo CDE .

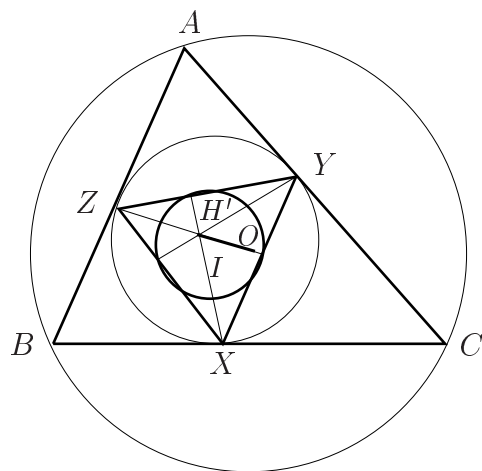
Sean P y Q los puntos de tangencia de (I_c, r_c) con CA y BC respectivamente, sabemos que $CP = CQ = s$, por lo que D, E, P y Q se encuentran sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro C y radio s .



Al invertir con respecto a $\mathcal{C}$, tenemos que (I_c, r_c) queda fija por ser una circunferencia ortogonal a $\mathcal{C}$ y la recta por A y B se invierte en el circuncírculo de CDE , luego este circuncírculo es tangente a (I_c, r_c) ya que la inversión conserva los ángulos.

Ejemplo 3.3.7 Sean X, Y, Z los puntos de contacto del incírculo del triángulo ABC con los lados BC, CA y AB , respectivamente. El ortocentro del triángulo XYZ , es colineal con el circuncentro y el incentro de ABC .

Sea H' el ortocentro de XYZ . Sobre la recta de Euler de XYZ se encuentran H' e I .



Al invertir respecto al incírculo, el circuncírculo de ABC se invierte en una circunferencia que pasa por los puntos inversos de A , B y C que son los puntos medios de los lados de XYZ , por lo que la circunferencia inversa de circuncírculo es la circunferencia de los nueve puntos de XYZ .

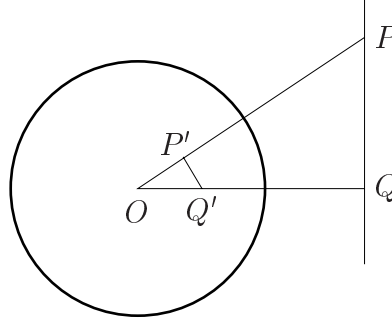
Por tanto I, O y el centro N' de la circunferencia de los nueve puntos de XYZ son colineales, por tanto H', I, O y N' son colineales, en particular lo son H', I y O .

Para algunas cuestiones métricas es necesario conocer cómo se relaciona la distancia entre dos puntos con la distancia entre los puntos inversos respectivos, esto lo resaltamos en la siguiente:

Proposición 3.3.8 Sean $\mathcal{C}(O, r)$ una circunferencia de inversión, P, Q dos puntos del plano y P', Q' sus puntos inversos, entonces:

$$Q'P' = \frac{r^2 PQ}{OP \cdot OQ}.$$

Demostración. Como $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$, resulta que OPQ y $OQ'P'$ son semejantes, luego:



$$\frac{Q'P'}{PQ} = \frac{OP'}{OQ} = \frac{OP \cdot OP'}{OP \cdot OQ} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ},$$

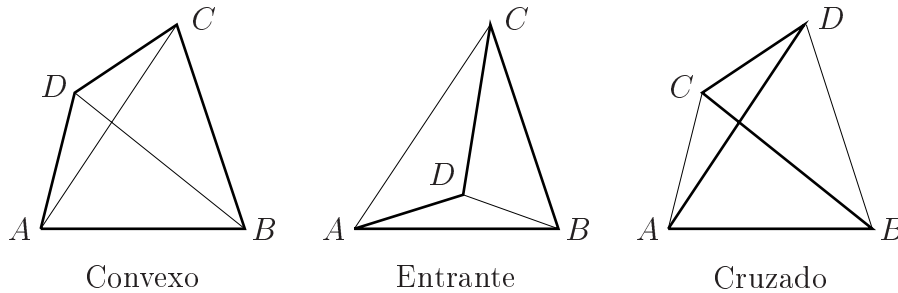
y entonces,

$$Q'P' = \frac{r^2 PQ}{OP \cdot OQ}.$$

En la siguiente sección veremos una aplicación de esta identidad.

3.4 Cuadriláteros

En esta parte estudiaremos con más detalle propiedades de los cuadriláteros. Como señalamos antes, en la sección 1.8, tenemos tres tipos de cuadriláteros convexo, entrante, cruzado.



Es natural definir el **área del cuadrilátero convexo** como la suma de las áreas de los dos triángulos que se forman cuando una de sus diagonales divide al cuadrilátero, esto es:

$$(ABCD) = (ABC) + (CDA) = (DAB) + (BCD)$$

Para que esta fórmula de área tenga validez en el cuadrilátero entrante, se introduce el concepto de área positiva y área negativa para un triángulo.

El **área de un triángulo** será **positiva** o **negativa** de acuerdo a que los vértices sean considerados con orientación positiva (es decir, los vértices se recorren en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj) o no; por ejemplo: los triángulos ABC , BCA , CAB , tendrán área positiva, mientras que los triángulos CBA , BAC , ACB tienen área negativa, desde luego las áreas estarán relacionados de la siguiente manera:

$$(ABC) = (BCA) = (CAB) = -(CBA) = -(BAC) = -(ACB).$$

En un cuadrilátero entrante, se tiene:

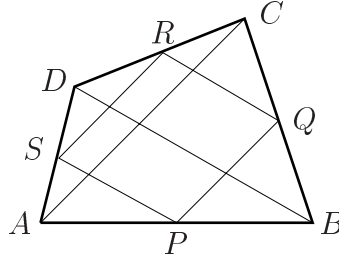
$$(ABCD) = (ABD) + (BCD) = (ABC) - (ADC) = (ABC) + (CDA).$$

Finalmente, el área de un cuadrilátero cruzado resulta ser la diferencia entre las áreas de los dos pequeños triángulos en que aparentemente esta compuesto. $(ABCD) = (ABC) + (CDA)$, en este caso (ABC) es “positiva” y sumamos (algebraicamente) el área (CDA) que es “negativa”.

El siguiente teorema es básico, de él se deducen varios resultados sobre el estudio de los cuadriláteros.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Varignon) *Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. El perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.*

Demostración. Sean P, Q, R, S , los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA . En los triángulos ABC y ACD , PQ y RS son segmentos paralelos a AC y de longitud la mitad de AC . Análogamente QR y SP son segmentos paralelos a BD y de longitud la mitad de BD . Por tanto, $PQRS$ es un paralelogramo de perímetro $AC + BD$.



Demostraremos lo referente al área, utilizando el concepto de área con signo.

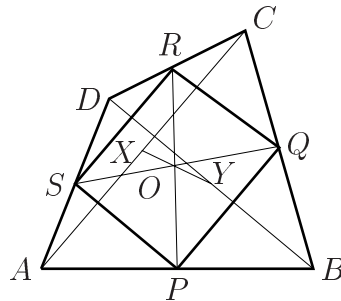
$$\begin{aligned}
 (PQRS) &= (ABCD) - (PBQ) - (RDS) - (QCR) - (SAP) = \\
 &= (ABCD) - \frac{1}{4}[(ABC) + (CDA) + (BCD) + (DAB)] = \\
 &= (ABCD) - \frac{1}{4}[(ABCD) + (BCDA)] = \\
 &= \frac{1}{2}(ABCD).
 \end{aligned}$$

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.4.2 *Resulta claro que $PQRS$ es rectángulo si y sólo si AC es perpendicular a BD . Observemos también que $PQRS$ es un rombo si y sólo si $AC = BD$.*

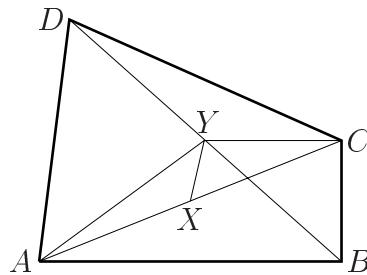
Ejemplo 3.4.3 Si P, Q, R, S, X, Y , son los puntos medios de AB, BC, CD, DA, AC y BD , entonces PR, QS y XY son concurrentes en un punto que las biseca. El punto de concurrencia se conoce como el **centroide del cuadrilátero**.

Como $PQRS$ es un paralelogramo, sus diagonales se cortan en un punto O que biseca a estas diagonales. En el cuadrilátero $ABDC$, se tiene que AD y BC son sus diagonales y el paralelogramo de sus puntos medios es $PYRX$. En este paralelogramo se tiene también que sus diagonales se bisecan, pero una de sus diagonales es PR que estaba bisecada por O , luego la otra diagonal XY tiene a O como punto medio. Por lo tanto, PR, QS y XY son concurrentes en O .



Ejemplo 3.4.4 Con las mismas hipótesis del ejemplo anterior en un cuadrilátero $ABCD$, se tiene:

- (1) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2$.
- (2) $AC^2 + BD^2 = 2(PR^2 + QS^2)$.



Como AY, CY y YX son medianas de los triángulos ABD, CDB y YAC respectivamente, tenemos que: $2AY^2 = AB^2 + DA^2 - \frac{1}{2}BD^2$, $2CY^2 = BC^2 + CD^2 - \frac{1}{2}BD^2$ y $2XY^2 = AY^2 + CY^2 - \frac{1}{2}AC^2$ (ver ejemplo 2.3.5). Sumando las igualdades anteriores y simplificando obtenemos:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4XY^2.$$

La segunda parte se sigue de que $PQRS$ es paralelogramo y la ley del paralelogramo (teorema 1.8.2).

3.4.1 Cuadriláteros cíclicos

Existen varias clases de cuadriláteros, pero quizás los que más atraen la atención para su estudio son los cuadriláteros cíclicos, es decir aquellos cuyos vértices están sobre una misma circunferencia. En la sección 1.8, vimos que hay dos criterios (que nunca deben olvidarse) que nos permiten decidir cuando un cuadrilátero es cíclico o no.

Criterio 1. Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

Criterio 2. Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.

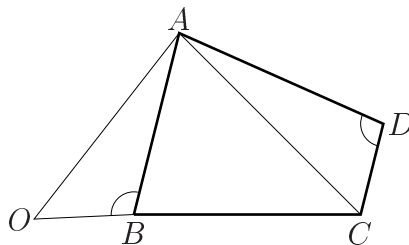
Un resultado elegante para caracterizar a los cuadriláteros cíclicos es el:

Teorema 3.4.5 (Teorema de Ptolomeo) *El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.*

Demostración. Para la demostración hacemos la siguiente construcción. Consideramos el cuadrilátero $ABCD$ (puede ser o no cíclico) y tomamos un punto O de manera que el AOB sea semejante al ACD . Es inmediato que:

(a) $ABCD$ es cíclico $\Leftrightarrow O, B, C$ son colineales $\Leftrightarrow OC = OB + BC$.

(b) $ABCD$ no es cíclico $\Leftrightarrow OC < OB + BC$.



Como los triángulos AOB y ACD son semejantes, se tiene que:

(c) $\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{OB}{CD}$, luego por el criterio de semejanza de triángulos LAL , tenemos que OAC y BAD son semejantes (los ángulos $\angle OAC$ y $\angle BAD$ son iguales). Por tanto:

(d) $\frac{OC}{BD} = \frac{AC}{AD}$.

Supongamos ahora que $ABCD$ es cíclico, entonces por (a) $OC = OB + BC$, usando (c) y (d) esta última igualdad se reescribe como:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC$$

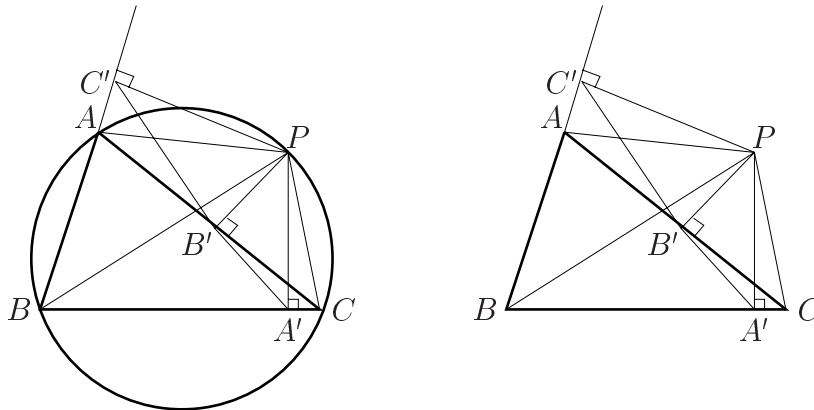
por tanto $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Recíprocamente, si $ABCD$ no es cíclico, se tiene por (b) la desigualdad $OC < OB + BC$, entonces $AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Teorema 3.4.6 (Teorema de Simson) *Las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo son colineales si y sólo si el punto se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo.*

Demostración. Sean ABC el triángulo, P el punto y A', B' y C' las proyecciones de P sobre los lados BC , CA y AB respectivamente. La clave de la demostración está en observar que los cuadriláteros $AB'C'P$, $BA'PC'$ y $A'CPB'$ son cuadriláteros cíclicos, esto se debe a que los ángulos en A' , B' y C' son rectos.

Veamos primero que la condición es suficiente. Supongamos entonces que P se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo ABC , podemos suponer que está sobre el arco CA que no contiene a B , los demás casos se abordan de manera semejante.



Como el cuadrilátero $ABCP$ es cíclico, tenemos que: $\angle APC = 180^\circ - \angle ABC$. Además $BA'PC'$ es también cuadrilátero cíclico, tenemos: $\angle C'PA' = 180^\circ - \angle ABC$. Igualando las dos relaciones y restando el ángulo común $\angle APA'$, obtenemos que:

$$\angle A'PC = \angle C'PA. \quad (3.1)$$

Para concluir que A' , B' y C' son colineales, bastará observar que $B'C'$ y $B'A'$ forman con AC ángulos iguales. En el cuadrilátero cíclico $AB'PC'$ se tiene la igualdad: $\angle C'B'A = \angle C'PA$ y como $A'B'CP$ es también cíclico se tiene que: $\angle A'B'C = \angle A'PC$. Estas dos últimas igualdades junto con la identidad (3.1) nos ayudan a concluir que:

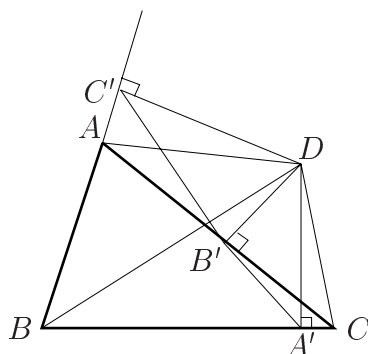
$$\angle C'B'A = \angle A'B'C \quad (3.2)$$

por lo que A' , B' y C' son colineales.

Veamos que la condición es necesaria. Si A' , B' y C' son colineales, entonces la igualdad (3.2) es verdadera, por ser ángulos opuestos por el vértice. Como los cuadriláteros $B'A'CP$ y $AB'PC'$ son cíclicos tenemos que (3.1) es también verdadera, al sumar de ambos lados de (3.1) el ángulo APA' , tenemos que: $\angle APC = \angle C'PA'$. Como $A'BC'P$ es cíclico $\angle C'PA'$ es suplementario al $\angle ABC$, luego también $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$, por lo que $ABCP$ es cíclico.

La recta por A' , B' y C' se conoce como la **recta de Simson** de P con respecto al triángulo ABC .

Con la ayuda del teorema de Simson se puede dar otra demostración sencilla del teorema de Ptolomeo. Antes necesitamos justificar unas relaciones métricas de los segmentos $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$, donde A' , B' y C' son los pies de las perpendiculares de un punto D a los lados de un triángulo ABC .



Como $B'A'CD$ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de diámetro DC , se tiene por la ley de los senos que:

$$\frac{\text{sen } \angle A'CB'}{A'B'} = \frac{\text{sen } 90^\circ}{DC} = \frac{1}{DC}$$

Luego: $A'B' = DC \text{ sen } \angle A'CB' = \frac{c \cdot DC}{2R}$. Análogamente, $B'C' = \frac{a \cdot DA}{2R}$ y $C'A' = \frac{b \cdot DB}{2R}$, donde $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$.

Observamos que las relaciones son válidas independientemente de que el punto D esté o no sobre el circuncírculo del triángulo ABC .

Ahora observamos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ y } D \text{ son concíclicos} &\Leftrightarrow A', B' \text{ y } C' \text{ son colineales} \\ &\Leftrightarrow A'B' + B'C' = A'C' \\ &\Leftrightarrow \frac{c \cdot DC}{2R} + \frac{a \cdot DA}{2R} = \frac{b \cdot DB}{2R} \\ &\Leftrightarrow AB \cdot DC + BC \cdot DA = CA \cdot DB. \end{aligned}$$

La primera equivalencia se debe al teorema de Simson, la segunda es la ecuación de Chasles, para decidir si tres puntos son colineales, la tercera es la observación que se hizo sobre las longitudes de $A'B'$, $B'C'$ y $A'C'$, y la última es una substitución sencilla. La equivalencia entre la primera afirmación y la última igualdad es el **teorema de Ptolomeo**.

Podemos hacer una observación más: si D no está sobre el circuncírculo del triángulo ABC , entonces A' , B' y C' no son colineales, luego no es válida la igualdad $A'B' + B'C' = A'C'$. En tal caso se tiene que A' , B' y C' forman un triángulo y en él es válida la desigualdad del triángulo: $A'B' + B'C' > A'C'$, por lo que podemos establecer el:

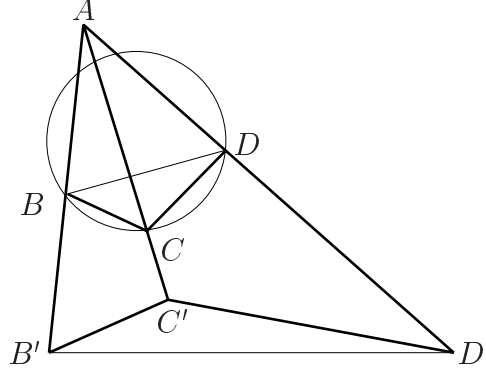
Teorema 3.4.7 (Teorema extendido de Ptolomeo) *Para cuatro puntos A, B, C y D siempre es válida la desigualdad:*

$$AB \cdot DC + BC \cdot DA \geq CA \cdot DB.$$

Y la igualdad se da solamente en el caso que A, B, C y D sean concíclicos.

Hay otra manera de demostrar el teorema extendido de Ptolomeo, con la ayuda de la inversión:

Demostración del teorema extendido de Ptolomeo, usando inversión. Dados los cuatro puntos A, B, C y D , aplicamos una inversión con respecto a una circunferencia de centro A y cualquier radio. Sean B', C' y D' los inversos de B, C y D , respectivamente.



Tenemos que, $B'C' + C'D' > B'D'$, a menos que C' se encuentre sobre la recta $B'D'$ y entre B' y D' . En este caso, obtenemos, $B'C' + C'D' = B'D'$. Recordamos que si P' y Q' son los inversos de P y Q entonces $P'Q' = \frac{r^2 PQ}{OP \cdot OQ}$, donde O es el centro de inversión y r el radio de la circunferencia de inversión. Al aplicar esta regla en la desigualdad esta toma la forma:

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} > \frac{BD}{AB \cdot AD},$$

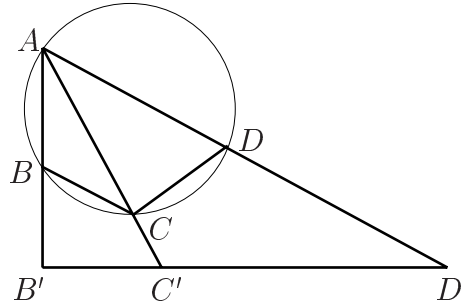
que al despejar nos da:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD,$$

a menos que C' se encuentre sobre la recta $B'D'$ y entre B' y D' , que es solamente en el caso en que A, B, C y D se encuentren en una circunferencia o sobre una recta.

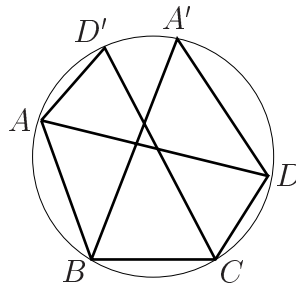
Ejemplo 3.4.8 Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$



Aplicamos una inversión con respecto a una circunferencia de centro A y radio cualquiera. Sean B' , C' y D' los inversos de B , C y D respectivamente, como $ABCD$ es cíclico, B' , C' y D' son colineales. Al aplicar el Teorema de Stewart al triángulo $AB'D'$ con ceviana AC' y usando la relación que guardan las longitudes de segmentos con los segmentos invertidos se tiene la igualdad que se pide.

Veamos otra forma de analizar el ejemplo, sean A' y D' puntos sobre el circuncírculo del cuadrilátero $ABCD$, tales que $DA' = AB$ y $AD' = DC$.



Como los arcos CDA' y BAD' son iguales se tiene que $CA' = BD'$. También los arcos $D'A'C$, $BD'A'$ y $AD'A'D$ son iguales por lo que $BA' = D'C = AD$. Al aplicar el teorema de Ptolomeo a los cuadriláteros $ABCD'$ y $BCDA'$, resulta:

$$AC \cdot BD' = AB \cdot D'C + BC \cdot AD' = AB \cdot AD + BC \cdot CD,$$

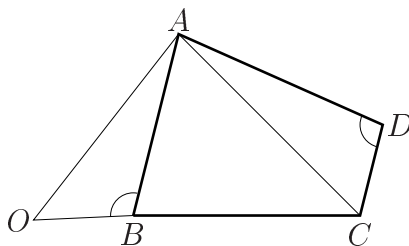
$$BD \cdot A'C = BC \cdot A'D + CD \cdot A'B = BC \cdot AB + CD \cdot AD.$$

Finalmente dividimos estas ecuaciones y recordando que $A'C = BD'$, obtenemos:

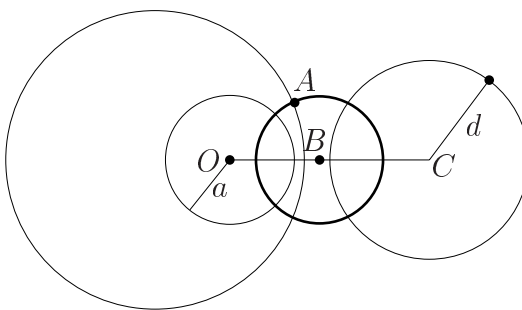
$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Ejemplo 3.4.9 *Construir con regla y compás un cuadrilátero cíclico $ABCD$, donde sus lados AB, BC, CD, DA sean respectivamente a, b, c, d , y con b y d un par de lados opuestos.*

Para la construcción usaremos las ideas de la demostración del teorema de Ptolomeo. Sobre una recta localizamos O, B y C de manera que $BC = b$ y $BO = \frac{ac}{d}$ (este último segmento se encuentra con regla y compás como una cuarta proporcional, ver construcción 1.9.11).



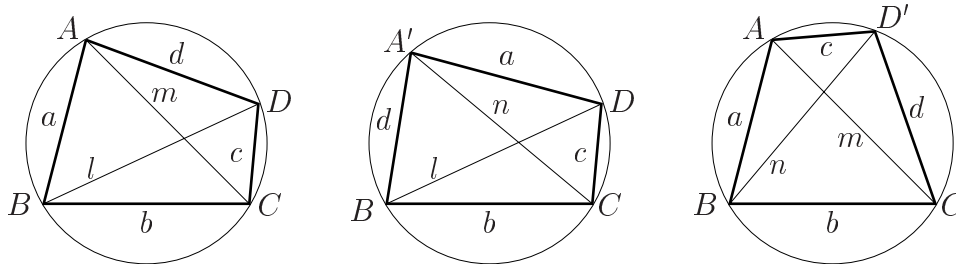
Un lugar geométrico del vértice A es el círculo (B, a) . Del hecho de que $\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{OB}{CD}$ (ver demostración del teorema de Ptolomeo 3.4.5), tenemos que $\frac{AO}{AC} = \frac{OB}{CD} = \frac{ac}{cd} = \frac{a}{d}$, por tanto $\frac{AO}{AC} = \frac{a}{d}$, luego A se encuentra sobre el círculo de Apolonio que definen las circunferencias (O, a) y (C, d) . Este segundo lugar geométrico se contruye también con regla y compás como se ha señalado en la sección 3.1. La intersección de este círculo de Apolonio con el círculo (B, a) determinan a A .



Luego, hemos construido el triángulo ABC y de aquí es fácil saber como seguir para terminar de construir el cuadrilátero $ABCD$. Desde luego habrá solución si las construcciones anteriores son realizables, no es difícil ver que una condición necesaria y suficiente para realizar la construcción es que el más grande de los segmentos sea menor que la suma de los otros tres.

3.4.2 Área de un cuadrilátero cíclico

En la construcción del cuadrilátero en el ejemplo anterior asumimos que el lado d era el opuesto al lado b . Obtendríamos otros dos cuadriláteros, si los lados a o c los consideramos como los opuestos al lado b .



De igual manera estos resolverían también el problema de construir el cuadrilátero. Además presentan la siguiente curiosidad: estos tres cuadriláteros definen sólo tres diagonales, el primer cuadrilátero define dos que llamaremos l y m , en el segundo como B, C, D , no cambian, la diagonal l queda fija y se define una nueva diagonal n ; ahora en el tercero, la diagonal m queda fija y como los arcos BAD' del tercero y CDA' del segundo son iguales se tiene que la diagonal que determinan son iguales. Podemos resumir lo anterior en el siguiente:

Teorema 3.4.10 *Dadas cuatro cantidades a, b, c, d , cada una menor que la suma de las otras tres, estas sirven como lados de tres cuadriláteros cíclicos diferentes y de áreas iguales.*

Falta sólo justificar porqué los tres tienen la misma área. Por ejemplo $ABCD$ y $A'BCD$ tienen la misma área pues el triángulo BCD es una parte común de los cuadriláteros y los otros triángulos ABD y $A'BD$ que completan los cuadriláteros, tienen la misma área ya que sus lados tienen longitudes a, d y l . Análogamente se puede mostrar que los cuadriláteros $ABCD$ y $ABCD'$ tienen la misma área.

Un resultado que se obtiene del teorema anterior es:

Corolario 3.4.11 *Si R es el radio del círculo donde se encuentran los cuadriláteros de lados a, b, c, d , y diagonales l, m, n , entonces el área del*

cuadrilátero es igual a $\frac{lmn}{4R}$. También se tiene que el cuadrado del área del cuadrilátero es:

$$\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{16R^2}.$$

Demostración. Por el teorema de Ptolomeo $lm = ac + bd$, por tanto: $lmn = acn + bdn = 4R(CDA') + 4R(BCA') = 4R(A'BCD)$, luego $(ABCD) = \frac{lmn}{4R}$. También, por el teorema de Ptolomeo tenemos que $mn = ad + bc$ y $nl = ab + cd$, por lo que:

$$16R^2(ABCD)^2 = (lmn)^2 = (lm)(mn)(nl) = (ac + bd)(ad + bc)(ab + cd).$$

La última igualdad muestra que el área es una función simétrica de los lados.

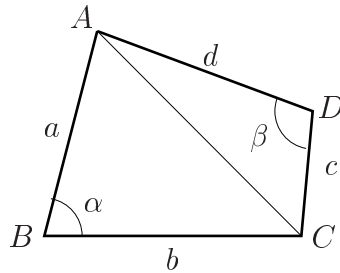
Otra relación del área en términos de las longitudes de los lados y simétrica está dada en el:

Teorema 3.4.12 (Teorema de Brahmagupta) *El área $\mathcal{A}$ de un cuadrilátero cíclico de lados a, b, c, d y semiperímetro s está dada por*

$$\mathcal{A}^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

Demostración. Es claro que si α y β son los ángulos entre los lados a, b y c, d respectivamente, entonces $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta$. Por tanto:

$$\begin{aligned} 16\mathcal{A}^2 &= 4a^2b^2 \sin^2 \alpha + 4c^2d^2 \sin^2 \beta + 8abcd \sin \alpha \sin \beta \\ &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha - 4c^2d^2 \cos^2 \beta + 8abcd \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$



Por otro lado la ley de los cosenos nos garantiza que:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta,$$

que al substituir en la ecuación anterior nos da:

$$\begin{aligned} 16\mathcal{A}^2 &= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= [2ab + 2cd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)][2ab + 2cd + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] - \\ &\quad - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= [c^2 + 2cd + d^2 - (a^2 - 2ab + b^2)][a^2 + 2ab + b^2 - (c^2 - 2cd + d^2)] - \\ &\quad - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= [(c + d)^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - (c - d)^2] - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= [c + d + b - a][c + d + a - b][a + b + d - c][a + b + c - d] - \\ &\quad - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \beta)) = \\ &= (2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2d) - 8abcd(1 + \cos(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Por tanto: $\mathcal{A}^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\alpha + \beta))$.

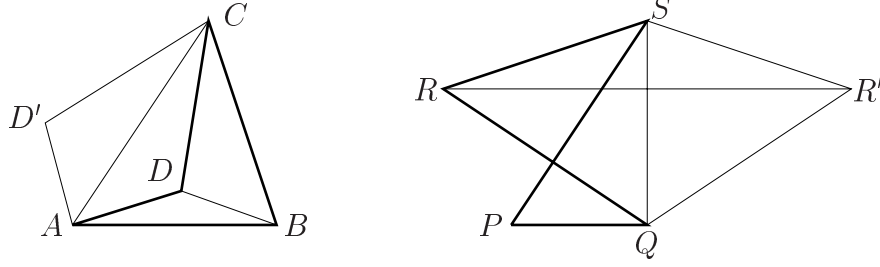
Como el cuadrilátero es cíclico, $\alpha + \beta = 180^\circ$, luego: $1 + \cos(\alpha + \beta) = 0$, con lo que se demuestra el teorema.

Observaciones 3.4.13 (1) La fórmula $\mathcal{A}^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\alpha + \beta))$, es válida aún si el cuadrilátero no es cíclico.

(2) Esta fórmula muestra que el cuadrilátero cíclico tiene mayor área que cualquier otro cuadrilátero con lados de longitud a, b, c y d .

Teorema 3.4.14 Entre los cuadriláteros de perímetro dado el cuadrado es el de mayor área.

Demostración. Es fácil convencerse de que el cuadrilátero deberá ser convexo. Por ejemplo, en la siguiente figura, el área del cuadrilátero convexo $ABCD'$ es mayor que el área del cuadrilátero entrante $ABCD$. También el área del cuadrilátero convexo $PQR'S$ es mayor que el área del cuadrilátero cruzado $PQRS$, (D' se obtiene de reflejar D sobre AC y R' de reflejar R en QS).



Por la observación anterior el cuadrilátero debe de ser cíclico. También es claro que si el perímetro está fijo, lo está también el semiperímetro s , y entonces lo que buscamos es una descomposición del perímetro en segmentos a, b, c, d de manera que $\mathcal{A}^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ sea máxima.

Lema 3.4.15 Para w, x, y, z números reales positivos se tiene:

(1) $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Y la igualdad sí y sólo si $x = y$.

(2) $wxyz \leq \left(\frac{w+x+y+z}{4}\right)^4$. Y la igualdad sí y sólo si $w = x = y = z$.

Demostración. (1) $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$.

Además la igualdad se tiene sí y sólo si $(x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $wxyz \leq \left(\frac{w+x}{2}\right)^2 \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 \leq \left[\left(\frac{\frac{w+x}{2} + \frac{y+z}{2}}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{w+x+y+z}{4}\right)^4$

Donde las desigualdades se han obtenido al aplicar la parte (1).

La primera desigualdad es igualdad si $w = x$ y $y = z$, la segunda desigualdad es igualdad si $w+x = y+z$, por lo que las dos desigualdades son igualdades solamente en el caso que $w = x = y = z$.

Aplicamos el lema:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \\ &\leq \left[\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c) + (s-d)}{4}\right]^4 = \left[\frac{4s-a-b-c-d}{4}\right]^4 \end{aligned}$$

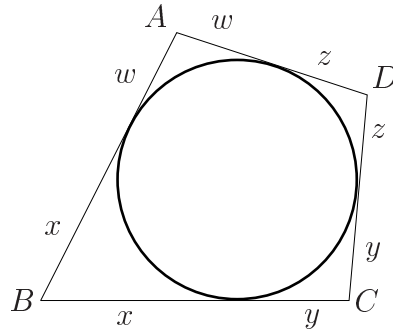
Por tanto: $\mathcal{A}^2 \leq \left[\frac{a+b+c+d}{4}\right]^4$, y la igualdad se da si $s-a = s-b = s-c = s-d$, esto es cuando $a = b = c = d$.

3.4.3 Otros cuadriláteros de interés

Presentamos ahora una serie de resultados sobre cuadriláteros con propiedades especiales.

Teorema 3.4.16 *El cuadrilátero $ABCD$ es **circunscrito** (sus lados son tangentes a una misma circunferencia) sí y sólo si $AB + CD = BC + DA$.*

Demostración. Si el cuadrilátero es circunscrito y si w, x, y, z , son las longitudes de las tangentes a la circunferencia desde A, B, C, D , respectivamente, es fácil ver que $AB + CD = w + x + y + z = BC + DA$.

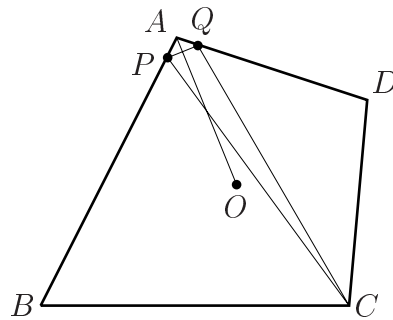


Recíprocamente si $AB + CD = BC + DA$, tenemos, en el caso en que dos lados adyacentes sean iguales (y entonces los otros dos lados también iguales), que el resultado es inmediato.

Supongamos que $AB > BC$, entonces

$$AB - BC = AD - CD > 0.$$

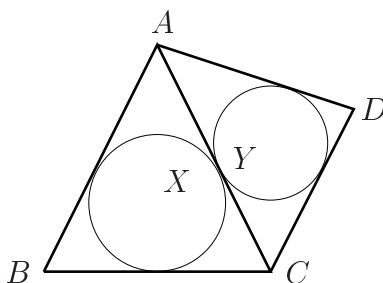
Sea P un punto sobre AB de manera que $BP = BC$ y sea Q sobre AD con $DQ = DC$, tenemos entonces que $AP = AQ$.



Los triángulos APQ , BCP , CDQ son isósceles y las bisectrices de los ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle D$, son las mediatrices de los lados PQ , PC y CQ . Como sabemos que las mediatrices concurren en el circuncentro O del triángulo PQC , luego O es equidistante a los lados del cuadrilátero, por lo que el cuadrilátero admite un círculo inscrito.

Ejemplo 3.4.17 Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito. Los incírculos de los triángulos ABC y CDA son tangentes.

Sean $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ y $e = AC$. Sean X y Y los puntos de tangencia de los incírculos de los triángulos ABC y ACD con la diagonal AC .



En el triángulo ABC , $AX = \frac{a+e-b}{2}$ y en el triángulo ACD , $AY = \frac{d+e-c}{2}$, (ver sección 2.4). Luego:

$$XY = AX - AY = \frac{a+e-b}{2} - \frac{d+e-c}{2} = \frac{(a+c) - (b+d)}{2}.$$

Por otro lado, como $ABCD$ es un cuadrilátero circunscrito, $a+c = b+d$, luego $XY = 0$, por lo que los incírculos son tangentes en $X = Y$.

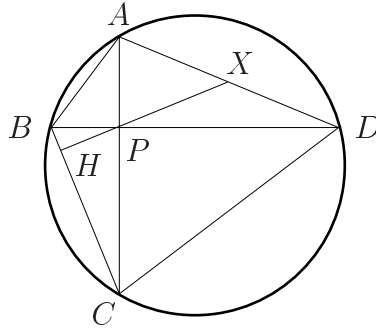
Teorema 3.4.18 (Teorema de Brahmagupta) En un cuadrilátero cíclico con diagonales perpendiculares, al que llamamos **ortodiagonal**, la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es perpendicular a un lado biseca al lado opuesto.

Demostración. Sea P la intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$. Trazamos PH la perpendicular desde P al lado BC y sea

X la intersección de PH con el lado DA . La demostración se basa en observar que:

$$\angle ACB = \angle ADB, \quad (3.3)$$

ya que abren el mismo arco.



Además,

$$\angle BPH = \angle XPD, \quad (3.4)$$

ya que son ángulos opuesto por el vértice. Como BCP y BPH son triángulos semejantes, tenemos

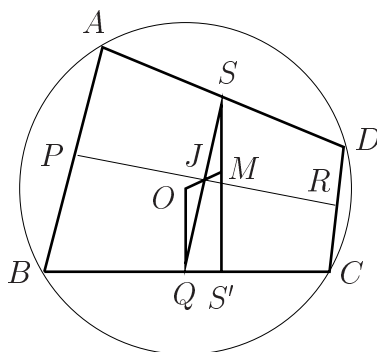
$$\angle BPH = \angle PCB. \quad (3.5)$$

Las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) implican que $\angle XDP = \angle XPD$. Por tanto, $XP = XD$ y como el triángulo APD es rectángulo se tiene que X es punto medio de AD .

Ejemplo 3.4.19 Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y ortodiagonal, las proyecciones del punto de intersección de las diagonales a los cuatro lados, se encuentran sobre una circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados.

En efecto, sabemos que los puntos medios P, Q, R, S , de los lados AB, BC, CD, DA , respectivamente, forman un paralelogramo de lados paralelos a las diagonales. Como las diagonales son perpendiculares, el paralelogramo es un rectángulo y entonces $PQRS$ es cíclico. Sean O el punto de intersección de las diagonales AC y BD , y H, I, J, K , las proyecciones de O sobre los lados AB, BC, CD, DA . Por el teorema anterior, H se encuentra en la

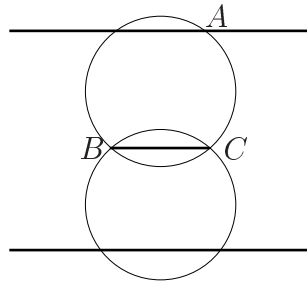
Ejemplo 3.4.20 Las perpendiculares desde los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cíclico a los respectivos lados opuestos son concurrentes en un punto llamado el **anticentro del cuadrilátero cíclico** y éste es simétrico al circuncentro con respecto al centroide.



3.5 Construcciones con regla y compás

Construcción 3.5.1 $(\angle A, a, h_a)$.

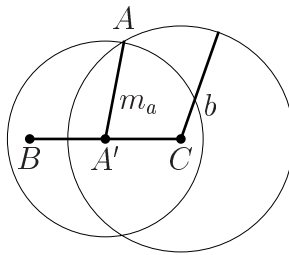
Solución. Consideramos un segmento BC de longitud a . Un lugar geométrico para el punto A es el conjunto de puntos X tales que $\angle BXC = \angle A$. Sabemos que éste se forma de dos arcos de circunferencia que tienen a BC como cuerda común y que se construye con regla y compás.



Un segundo lugar geométrico para el punto A son los puntos cuya distancia al segmento BC es igual a h_a , éste lugar geométrico consta de un par de rectas paralelas al segmento BC , cada una a distancia h_a de BC . Estas paralelas son factibles de construirse con regla y compás. Luego el punto A se encuentra en la intersección de estos dos lugares geométricos. Hay a lo más cuatro soluciones: hay dos cuando las rectas son tangentes a los arcos de circunferencia y ninguna cuando no hay intersección de las rectas con los arcos de circunferencia.

Construcción 3.5.2 (a, b, m_a) .

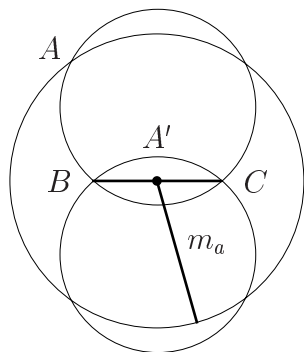
Solución. Consideramos un segmento BC de longitud a . Un lugar geométrico para el punto A es la circunferencia de centro C y radio b . Un segundo lugar geométrico del punto A , es la circunferencia de radio m_a y centro A' el punto medio de BC (que se construye con regla y compás). Hay dos soluciones cuando $-\frac{a}{2} < b - m_a < \frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2} < b + m_a$.



Construcción 3.5.3 $(\angle A, a, m_a)$.

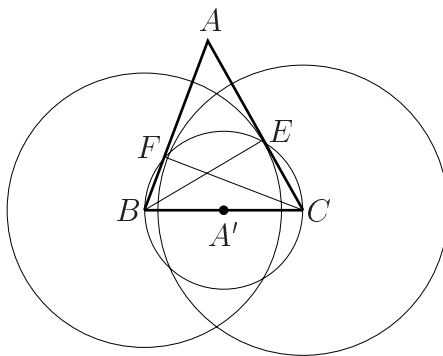
Solución. Consideramos un segmento BC de longitud a . Un lugar geométrico para el punto A es el conjunto de puntos X tales que $\angle BXC = \angle A$, sabemos que éste se forma de dos arcos de circunferencia que tienen a BC como

cuerda común y que se construye con regla y compás. Un segundo lugar geométrico del punto A , es la circunferencia de centro A' el punto medio de BC y de radio m_a . Hay solución si: (i) $\frac{a}{2} < m_a \leq \frac{a}{2} \cot \frac{A}{2}$ cuando $A < 90^\circ$, (ii) $\frac{a}{2} > m_a \geq \frac{a}{2} \cot \frac{A}{2}$ en el caso $A < 90^\circ$ y (iii) finalmente para $A = 90^\circ$, $m_a = \frac{a}{2}$.



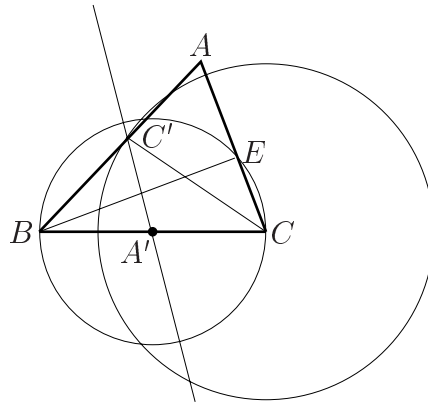
Construcción 3.5.4 (a, h_b, h_c) .

Solución. Consideramos un segmento BC de longitud a , y una circunferencia $\mathcal{C}$ de diámetro BC , los pies de las alturas desde B y desde C , se encuentran en tal circunferencia, por lo que al trazar la circunferencia de centro B y radio h_b , ésta intersectará a $\mathcal{C}$ en E el pie de la altura desde B . De igual manera la circunferencia de centro C y radio h_c , intersectará a $\mathcal{C}$ en F el pie de la altura desde C , la intersección de BF con CE determina el punto A . Hay cuatro posibles soluciones, ya que para E y F hay en cada caso dos posibles soluciones. Hay solución si las circunferencias se intersectan, esto es, cuando $h_b < a$ y $h_c < a$.

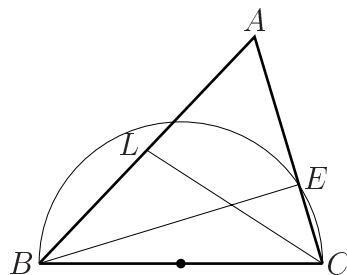


Construcción 3.5.5 (a, h_b, m_c) .

Solución. Sea BC un segmento de longitud a . Trazamos la circunferencia de diámetro BC , y localizamos sobre ésta a E el pie de la altura desde B . Un lugar geométrico de C' (el punto medio del lado AB), es la recta paralela a CE por A' el punto medio de BC . Otro lugar geométrico de C' es la circunferencia de centro C y radio m_c . Localizado el punto C' , podemos ahora encontrar el vértice A , trazando la recta por B y C' y la recta por C y E , el punto de intersección de tales rectas es el punto A . Hay a lo más dos soluciones y para encontrarlas son necesarias las condiciones: $h_b < a$ y $h_b < 2m_c$.

**Construcción 3.5.6** (a, h_b, b_c) .

Solución. Supongamos que el triángulo que vamos a construir es ABC . El triángulo rectángulo BCE , se puede construir ya que conocemos la hipotenusa a y un cateto h_b . De este triángulo nos sirve el ángulo en el vértice C , es el mismo ángulo en C que necesitamos para nuestro triángulo.

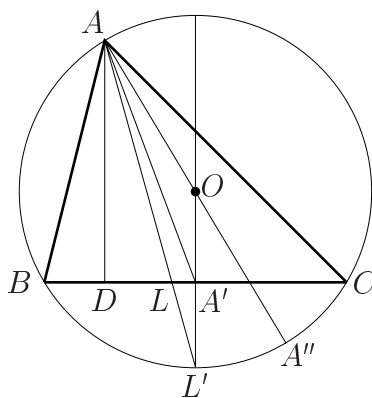


Como conocemos $\angle C$, podemos trazar la bisectriz interna este ángulo y sobre ésta localizar al extremo L de la bisectriz CL que, sabemos, es de longitud

b_c . Luego debemos trazar BL y CE el punto de intersección es el vértice A . Hay a lo más dos soluciones y es necesario que $h_b < a$ y $b_c < 2a \cos \frac{C}{2}$.

Construcción 3.5.7 (h_a, m_a, b_a) .

Solución. Supongamos que el triángulo ABC se ha construido y que la altura, la mediana y la bisectriz desde A son $AD = h_a$, $AA' = m_a$ y $AL = b_a$ respectivamente. Sea AA'' el diámetro por A , y L' la intersección de la bisectriz AL con el circuncírculo. La clave de la solución del problema está en recordar que los triángulos rectángulos ABD y $AA''C$ son semejantes (basta notar para esto que, los ángulos en B y en A'' abren el mismo arco) y por tanto AL es también bisectriz del ángulo $\angle DAA''$.

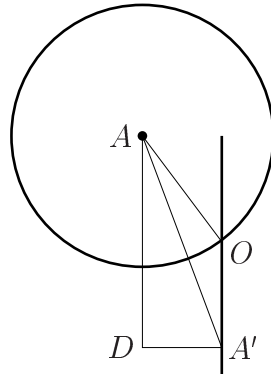


Como ADL y ADA' son triángulos rectángulos donde se conocen un cateto y la hipotenusa, la construcción de ellos es posible (siempre y cuando $h_a < b_a$ y $h_a < m_a$). Como el ángulo $\angle DAL$ es ahora conocido podemos construir un lugar geométrico para el circuncentro O , simplemente trazando AA'' de manera que $\angle LAA'' = \angle DAL$. Otro lugar geométrico para O es la perpendicular a DA' por A' (esta será la mediatriz del lado BC). Por tanto O es el punto común a tales lugares geométricos. Finalmente trazamos la circunferencia de centro O y radio OA , en los puntos donde la circunferencia corte a la recta DL se localizan los vértices B y C . Hay solución siempre y cuando $h_a < b_a < m_a$.

Construcción 3.5.8 (h_a, m_a, R) .

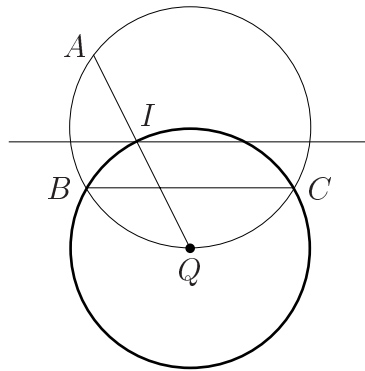
Solución. Al igual que en el problema anterior, podemos construir el triángulo rectángulo ADA' , ya que conocemos la hipotenusa m_a y un cateto h_a (necesitamos que $h_a < m_a$). Un lugar geométrico para el circuncentro O es la

circunferencia (A, R) y otro lugar geométrico de O es la perpendicular a DA' por A' . Localizado O , procedemos como en el ejemplo anterior.



Construcción 3.5.9 $(a, \angle A, r)$.

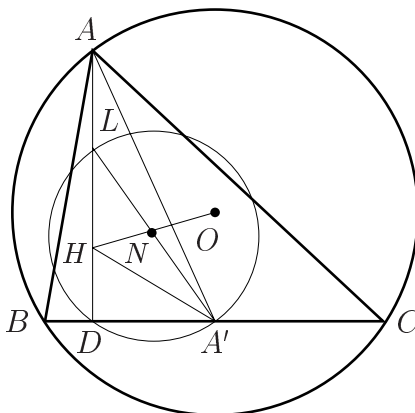
Solución. La clave del problema está en recordar que la bisectriz interna del ángulo $\angle A$, corta al circuncírculo en un punto Q equidistante a B, C e I , por lo que una circunferencia con centro en Q y radio QI , pasa por estos tres puntos.



Consideramos un segmento BC de longitud a . Trazamos las circunferencias donde se encuentran los puntos X tales que $\angle BXC = \angle A$. La cuerda común BC divide a cada circunferencia en dos arcos, en uno de ellos se encuentran los puntos de un lugar geométrico para A y en los arcos complementarios localizamos al punto medio Q del arco. Construimos las circunferencias de centro Q y radio QB ésta será un lugar geométrico del incentro I ; otro lugar geométrico de I , es la recta paralela a BC a una distancia r .

Construcción 3.5.10 (A, A', H) .

Solución. El problema en este caso es, dados tres puntos en posición sobre el plano, encontrar un triángulo ABC de manera que uno de los puntos sea el vértice A , otro el ortocentro H y que el tercero sea el punto medio A' del lado BC .



Trazamos el triángulo AHA' y localizamos el punto medio L de AH , también localizamos D el pie de la perpendicular de A' sobre el segmento AH (tal punto D resultará ser el pie de la altura de A sobre el lado BC). La circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC , pasa por L, D y A' , siendo estos tres puntos de la circunferencia conocidos, la podemos trazar, ya que el centro N es el punto medio de LA' . Como N también es el punto medio HO , podemos construir O , al reflejar en N el segmento HN . Ahora estamos en posibilidad de trazar el circuncírculo (O, OA) ; los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta por D y A' serán los vértices B y C .

3.6 Ejercicios

En esta sección damos una serie de ejercicios que le permitirán al lector reafirmar y ampliar los conocimientos adquiridos en este capítulo, iniciando con problemas relativamente sencillos cuya dificultad se va incrementando.

Ejercicio 3.6.1 Dado un triángulo ABC construir un cuadrado inscrito en el triángulo de forma tal que uno de sus lados esté sobre BC .

Ejercicio 3.6.2 Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias concéntricas de radios r y R , respectivamente. Trace una recta que corte a $\mathcal{C}_2$ en A y D , y a $\mathcal{C}_1$ en B y C , de manera que $AB = BC = CD$.

Ejercicio 3.6.3 El área de un pentágono $ABCDE$ es 18. El área de un pentágono semejante $A'B'C'D'E'$ es 32. La diagonal BE mide 6. Encuentre la longitud de $B'E'$.

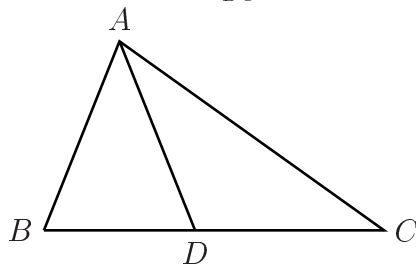
Ejercicio 3.6.4 La suma de las potencias de los vértices de un triángulo con respecto a su circunferencia de los nueve puntos es igual a un cuarto de la suma de los cuadrados de los lados del triángulo.

Ejercicio 3.6.5 Un triángulo isósceles con base BC está inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}_1$ de radio 1. Sean α el ángulo ABC y $\mathcal{C}_2$ una circunferencia tangente externamente a la base BC del triángulo en su punto medio y tangente internamente a $\mathcal{C}_1$. Encuentre el radio de $\mathcal{C}_2$ en términos de α .

Ejercicio 3.6.6 Sea ABC un triángulo con circuncentro O . Sean $\mathcal{C}_1$ la circunferencia que pasa por A y B con centro O_1 sobre AC y $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por A y C con centro O_2 sobre AB . Estas circunferencias se cortan en A y en P . Muestre que A , O y P son colineales.

Ejercicio 3.6.7 Una circunferencia de radio r pasa por dos vértices adyacentes de un cuadrado. La tangente a la circunferencia trazada desde otro vértice del cuadrado es dos veces mayor que el lado del cuadrado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

Ejercicio 3.6.8 En la siguiente figura suponga que $AB = 5$, $AD = 5$, $AC = 7$ y $BC = 9$. Encuentre la razón $\frac{BD}{DC}$.



Ejercicio 3.6.9 Sea P un punto en el interior de un ángulo ABC . Determine la recta por P que corte a AB en M y a BC en N , y tal que $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN}$ sea máximo.

Ejercicio 3.6.10 Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se cortan en los puntos A y B . Trace los diámetros de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que pasan por B y suponga que cortan a $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_1$ en C y D , respectivamente. Muestre que la recta AB pasa por el centro de la circunferencia determinada por B , C y D .

Ejercicio 3.6.11 Las bisectrices internas de los ángulos de un cuadrilátero forman un cuadrilátero cíclico.

Ejercicio 3.6.12 Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico E , F , G , H son los puntos medios de los arcos AB , BC , CD , DA , entonces FH es perpendicular a EG .

Ejercicio 3.6.13 Sea E un punto dentro del cuadrilátero convexo $ABCD$. Encuentre el área del cuadrilátero cuyos vértices son los centroides de los triángulos ABE , BCE , CDE y DAE .

Ejercicio 3.6.14 Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo, K , K' , puntos que trisecan al lado AB , L , L' puntos que trisecan a BC , M y M' , trisecan a CD y N , N' trisecan a DA . Muestre que las rectas KM' , $K'M$, LN' , $L'N$, determinan un cuadrilátero $PQRS$ de área igual a un noveno del área de $ABCD$.

Ejercicio 3.6.15 Muestre que si dos cuadriláteros convexos tienen los mismos puntos medios en sus lados, entonces tienen áreas iguales.

Ejercicio 3.6.16 Un triángulo acutángulo ABC está dado. La circunferencia de diámetro AB intersecta la altura CF en M y N , la circunferencia de diámetro CA intersecta la altura BE en P y Q . Demuestre que M , N , P , Q , están sobre una misma circunferencia.

Ejercicio 3.6.17 Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son las medidas (en radianes y en orden cíclico) de los ángulos internos de un cuadrilátero, muestre que éste es cíclico si y sólo si $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \pi^2$.

Ejercicio 3.6.18 Considere un triángulo cualquiera ABC . Sean M y N los puntos medios de AB y CA , y D un punto entre MN . Muestre que si

$AD^2 = MD \cdot DN$ entonces el circuncírculo del triángulo AMN intersecta a BC .

Ejercicio 3.6.19 Una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 5, tiene dos cuerdas, AB y CD , que no se intersectan dentro de $\mathcal{C}$, ni son paralelas. Supongamos que AB tiene longitud 8 y CD mide 6. Sean M el punto medio de AB y Q la intersección dentro de $\mathcal{C}$ de CB y DA . Pruebe que QM es perpendicular a CD .

Ejercicio 3.6.20 Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, si las diagonales AC y BD se intersectan en X y si A', B', C', D' , son los pies de las perpendiculares de X a los lados AB, BC, CD, DA , respectivamente, pruebe que $A'B'C'D'$ es un cuadrilátero circunscrito.

Ejercicio 3.6.21 Si $ABCDEFGH$ es un heptágono regular, muestre que

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Ejercicio 3.6.22 Un cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito alrededor de un círculo, con puntos de tangencia P, Q, R, S , a los lados AB, BC, CD, DA , respectivamente. Muestre que: $AB \cdot CD \cdot PR^2 = BC \cdot AD \cdot QS^2$.

Ejercicio 3.6.23 Los incentros de los cuatro triángulos determinados por los vértices de un cuadrilátero cíclico forman un rectángulo.

Ejercicio 3.6.24 Las diagonales dividen un cuadrilátero convexo en cuatro triángulos. Si los radios de las circunferencias inscritas en estos triángulos son iguales, muestre que el cuadrilátero dado es un rombo.

Ejercicio 3.6.25 Se sabe que en el cuadrilátero $ABCD$ los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB son iguales. Demuestre que $ABCD$ es un rectángulo.

Ejercicio 3.6.26 Sean E y F puntos sobre el lado BC del cuadrilátero convexo $ABCD$, (con E entre B y F), que cumplen: $\angle BAE = \angle FDC$ y $\angle EAF = \angle EDF$. Muestre que $\angle FAC = \angle BDE$.

Ejercicio 3.6.27 En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple $AB + BD < AC + CD$. Muestre que $AB < AC$.

Ejercicio 3.6.28 Sean A, B, C y D puntos en una circunferencia que se recorren de manera cíclica. Muestre que si las cuerdas AB y CD son paralelas entonces $AC = BD$.

Ejercicio 3.6.29 Sean D y E puntos sobre los lados CA y AB del triángulo ABC . Muestre que el cuadrilátero $BCDE$ es cíclico si y sólo si DE es paralela a la tangente en A del circuncírculo de ABC .

Ejercicio 3.6.30 Sean BE y CF las alturas desde B y C del triángulo ABC . Muestre que EF es paralela a la tangente en A del circuncírculo de ABC .

Ejercicio 3.6.31 Construya una circunferencia tangente a una recta dada y que pase por dos puntos que se encuentran del mismo lado de la recta.

Ejercicio 3.6.32 Sean ABC un triángulo equilátero y P un punto dentro del triángulo. Muestre que con los segmentos AP, BP y CP se puede construir un triángulo.

Ejercicio 3.6.33 Sean ABC un triángulo equilátero y P un punto dentro del triángulo tal que $AP = 3, BP = 4$ y $CP = 5$. Encuentre la longitud del lado del triángulo.

Ejercicio 3.6.34 Una recta corta los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC en D, E y F , respectivamente. Muestre que los circuncírculos de los triángulos AFE, BDF, CDE son concurrentes. ¿Qué lugar geométrico describe el punto de concurrencia cuando la recta varía?

Ejercicio 3.6.35 Considere un triángulo ABC y construya fuera de él puntos D y E de manera que: $\angle ADB = \angle ACE, AD = AB$ y $AE = AC$. Muestre que las rectas BD y CE se intersectan en un punto F que se encuentra sobre los circuncírculos de ACD y ABE . Muestre que los circuncírculos de ABD y ACE pasan por el punto de intersección G de CD y BE .

Ejercicio 3.6.36 Sean a, b, c, d los lados de un cuadrilátero convexo de área $\mathcal{A}$. Muestre que:

(a) $\mathcal{A} \leq \frac{a+b+c+d}{2}$, (b) $\mathcal{A} \leq \frac{a+c+b+d}{2}$ y (c) $\mathcal{A} \leq \left(\frac{a+c}{2}\right) \left(\frac{b+d}{2}\right)$.

Ejercicio 3.6.37 Sea ABC un triángulo en el espacio y $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$ los triángulos que resultan de proyectar ABC en los planos yz, xz

y xy . Si denotamos por (RST) el área del triángulo RST , pruebe que:

$$(ABC)^2 = (A_1B_1C_1)^2 + (A_2B_2C_2)^2 + (A_3B_3C_3)^2.$$

Ejercicio 3.6.38 Si cada cuatro de cinco circunferencias tienen un punto en común entonces las cinco tienen un punto común.

Ejercicio 3.6.39 Dos circunferencias de diámetros AB y AC se intersectan también en D . Muestre que B, C y D son colineales.

Ejercicio 3.6.40 Las diagonales de un trapezoide $ABCD$ (con BC paralela a AD) se intersectan en el punto O . Muestre que las áreas de los triángulos ABO y CDO son iguales.

Capítulo 4

Problemas

4.1 Enunciados de los problemas

En la sección 1 de este capítulo le presentamos varios problemas que le permitirán practicar los conceptos presentados en este libro y en la sección 2 le damos sugerencias para resolver estos problemas. Le recomendamos, sin embargo intentar resolver el problema antes de consultar la sugerencia correspondiente.

Problema 4.1.1 Sean E , F , K y L puntos sobre los lados AB , BC , CD y DA del cuadrado $ABCD$, respectivamente. Muestre que si los segmentos EK y FL son perpendiculares entonces $EK = FL$.

Problema 4.1.2 Sean ABC un triángulo, I su incentro y O su circuncentro. Si C , I y O son colineales entonces el triángulo es isósceles.

Problema 4.1.3 Si dos ángulos internos y consecutivos de un cuadrilátero son ángulos rectos entonces las bisectrices de los otros dos ángulos son perpendiculares entre sí.

Problema 4.1.4 Sea K el punto medio del lado BC del rectángulo $ABCD$. Encuentre el ángulo formado por AK y la diagonal BD , si sabemos que $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$.

Problema 4.1.5 Sea $ABCDE$ un pentágono convexo inscrito en una circunferencia, con sus cinco ángulos iguales. Muestre que los lados del pentágono son iguales.

Problema 4.1.6 ¿Qué forma debe tener un triángulo para que cumpla que los puntos medios de las alturas sean colineales?

Problema 4.1.7 Un cuadrilátero convexo queda dividido por sus diagonales en cuatro triángulos. ¿Cómo es el cuadrilátero si:

- (a) los cuatro triángulos tienen la misma área?
- (b) los cuatro triángulos tienen el mismo perímetro?

Problema 4.1.8 Muestre que si cuatro lados de un pentágono convexo son paralelos a su diagonal opuesta entonces el quinto lado también cumple que es paralelo a su diagonal opuesta.

Problema 4.1.9 Muestre que el único punto P dentro de una circunferencia donde pasan tres cuerdas de la misma longitud es el centro.

Problema 4.1.10 Encuentre un punto dentro de un cuadrilátero convexo donde la suma de las distancias del punto a los vértices sea mínima.

Problema 4.1.11 En el triángulo ABC , la altura AD , la bisectriz BM y la mediana CC' son concurrentes en un punto O . Muestre que si $AO = BO$ entonces ABC es equilátero.

Problema 4.1.12 En un triángulo ABC , la mediana BB' y la altura CF son iguales y además $\angle CBB' = \angle FCB$. Muestre que ABC es equilátero.

Problema 4.1.13 Sea ABC un triángulo y sobre su circunferencia circunscrita, considere a: C' el punto medio del arco AB , B' el punto medio del arco CA , y A' el punto medio del arco BC . Demuestre que el incentro del triángulo ABC es el ortocentro del triángulo $A'B'C'$.

Problema 4.1.14 Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se construyen triángulos equiláteros ABF y ADE hacia el exterior de $ABCD$. Pruebe que el triángulo FCE es equilátero.

Problema 4.1.15 La altura trazada hacia la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a ésta en segmentos de longitud 9 y 16. Del vértice del ángulo agudo mayor trazamos una recta que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuánto mide el segmento de tal recta que queda en el interior del triángulo?

Problema 4.1.16 Las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo $ABCD$ dividen al cuadrilátero en cuatro cuadriláteros con el mismo perímetro. Muestre que $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 4.1.17 Sean ABC un triángulo, M el punto medio de BC , L y N las intersecciones de AM con el incírculo del triángulo. Muestre que si $CA = AB + AM$, entonces el ángulo LIN es igual a 120° , donde I es el incentro de ABC .

Problema 4.1.18 Sea P un punto cualquiera dentro de un triángulo. Trace las rectas desde cada uno de los vértices que pasan por P . Estas rectas cortan a los lados del triángulo en los puntos X , Y y Z , respectivamente. Demuestre que

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1.$$

Problema 4.1.19 Sea G el centroide de un triángulo acutángulo ABC . Probar que cualquier punto P en el interior del triángulo BCG cumple con la desigualdad $\frac{AP}{PX} \geq 2$, donde X es la intersección de la prolongación de AP con el lado BC .

Problema 4.1.20 Sea ABC un triángulo isósceles con $CA = AB$. Sean X , Y , Z los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC , CA , AB respectivamente. Si CZ corta al incírculo en L y YL corta a BC en M , muestre que $XM = MC$.

Problema 4.1.21 Una recta corta a un cuadrilátero $ABCD$ en dos cuadriláteros que son cíclicos. Muestre que $ABCD$ tiene dos lados paralelos.

Problema 4.1.22 Por el punto A de la cuerda común AB de dos circunferencias, trace una recta que corte a una de ellas en el punto C y a la otra en el punto D . Las tangentes a dichas circunferencias en los puntos C y D , se intersectan en el punto M . Muestre que los puntos B , C , D y M están sobre una circunferencia.

Problema 4.1.23 Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC . Sean P y Q las intersecciones del circuncírculo de AOB con los segmentos

BC y AC , respectivamente. Sea N la intersección de PQ con la recta CO . Muestre que CN es perpendicular a PQ .

Problema 4.1.24 De los triángulos que tienen una base común y un mismo perímetro, el isósceles tiene mayor área.

Problema 4.1.25 De todos los triángulos con un perímetro dado, el triángulo equilátero es el que tiene mayor área.

Problema 4.1.26 Dada una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y radio r , y dos puntos P y Q del plano, construya un triángulo rectángulo inscrito en $\mathcal{C}$, de manera que uno de sus catetos pase por P y el otro cateto pase por Q .

Problema 4.1.27 Sea ABC un triángulo equilátero y P un punto sobre el arco BC del circuncírculo. Muestre que: $AP = BP + CP$.

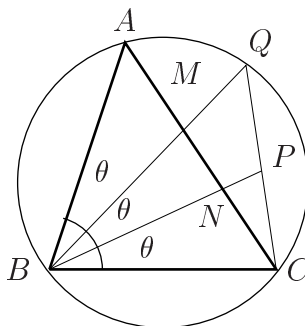
Problema 4.1.28 Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo de perímetro p , muestre que: $\frac{1}{2}p < AC + BD < p$.

Problema 4.1.29 Si $ABCDE$ es un pentágono convexo de perímetro p , muestre que: $p < AC + BD + CE + DA + EB < 2p$.

Problema 4.1.30 La bisectriz interna del ángulo A de un triángulo ABC intersecta al lado BC en D . Muestre que AD^2 es menor que $AB \cdot AC$.

Problema 4.1.31 Considerando la figura siguiente muestre que:

$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = 1.$$



Problema 4.1.32 Sea AL la bisectriz del ángulo en A de un triángulo acutángulo ABC . Sean M y N sobre los lados AB y AC respectivamente, de manera que $\angle MLA = \angle B$ y $\angle NLA = \angle C$. Si D es el punto de intersección de AL y MN , muestre que $AL^3 = AB \cdot AC \cdot AD$.

Problema 4.1.33 Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo $ABCD$. Sea E el pie de la perpendicular de C a la recta por A y B , y sea F el pie de la perpendicular de C a la recta por A y D . Muestre que: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

Problema 4.1.34 Sean ABC un triángulo y L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente. Muestre que $\angle LAC = \angle MBA$ si y sólo si $\angle CNA = \angle ALB$.

Problema 4.1.35 Considere un triángulo rectángulo ABC y llame P, Q, R , a las reflexiones de A, B, C sobre BC, CA, AB respectivamente. Calcule la razón del área del triángulo ABC entre el área del triángulo PQR .

Problema 4.1.36 Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo en A con el lado BC y el circuncírculo de ABC , respectivamente. Construya la intersección M del circuncírculo de ABL con el segmento AC . Pruebe que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.

Problema 4.1.37 Sea ABC un triángulo, G su centroide e I su incentro. Demuestre que $AC + AB = 2BC$ si y sólo si IG es paralelo a BC .

Problema 4.1.38 Considere una circunferencia de diámetro AB . Sobre la tangente al círculo por B , tome dos puntos C y D . Si AC corta a la circunferencia en F y AD corta a la circunferencia en E , demuestre que $AC \cdot AF = AD \cdot AE$.

Problema 4.1.39 Sea ABC un triángulo acutángulo. Encuentre el punto O dentro del triángulo tal que $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$.

Problema 4.1.40 Dos circunferencias con radios $\mathcal{C}_1 = (O_1, r)$ y $\mathcal{C}_2 = (O_2, R)$ son tangentes exteriormente. Sean AB y CD tangentes comunes a las dos circunferencias (con A y D en $\mathcal{C}_1$, B y C en $\mathcal{C}_2$). Demuestre que el cuadrilátero $ABCD$ tiene una circunferencia inscrita y encuentre el radio de ésta.

Problema 4.1.41 Sean a , b y c los lados de un triángulo. Muestre que

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Problema 4.1.42 El triángulo acutángulo ABC está inscrito en un círculo con centro O . Sean D la intersección de la bisectriz del ángulo BAC con el segmento BC y P la intersección de AB con la perpendicular a OA que pasa por D . Muestre que $AC = AP$.

Problema 4.1.43 Sobre los lados de un triángulo AB , BC y CA escoja los puntos K , L y M , respectivamente, de tal forma que ninguno de estos puntos sea un vértice. Demuestre que el área de al menos uno de los triángulos AKM , KBL y LCM es menor o igual que un cuarto del área del triángulo ABC .

Problema 4.1.44 Sea ABC un triángulo acutángulo con BE y CF las alturas desde los vértices B y C , respectivamente. Muestre que si $(CEF) \leq (EFB) \leq (FBC) \leq (BCE)$ entonces el triángulo es isósceles, donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ .

Problema 4.1.45 Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC . Si la circunferencia que pasa por AOB corta a BC (o su prolongación) en M y a AC (o su prolongación) en N . Demuestre que los radios de las circunferencias que pasan por AOB y MNC son iguales.

Problema 4.1.46 Sea ABC un triángulo rectángulo, con ángulo recto en C , construya un punto N dentro del triángulo de manera que los tres ángulos $\angle NBC$, $\angle NCA$, y $\angle NAB$ sean iguales.

Problema 4.1.47 Sea $ABCDEF$ un hexágono con ángulos internos iguales. Muestre que el hexágono tiene lados opuestos paralelos.

Problema 4.1.48 Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con lados opuestos paralelos. Muestre que $2(ACE) \geq (ABCDEF)$.

Problema 4.1.49 Si todos los ángulos del hexágono $ABCDEF$ son iguales, muestre que las diferencias de lados opuestos son iguales.

Problema 4.1.50 Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con lados opuestos paralelos, muestre que $(ACE) = (BDF)$.

Problema 4.1.51 En el hexágono $ABCDEF$, los triángulos ABC , BCD , CDE , DEF , EFA y FAB son congruentes. Muestre que las diagonales AD , BE y CF son iguales.

Problema 4.1.52 Sean A y B dos puntos sobre una circunferencia $\mathcal{C}$. Un arco de circunferencia $\mathcal{C}'$ que pasa por A y B , divide el área encerrada por $\mathcal{C}$ en dos partes de áreas iguales. Muestre que la longitud del arco $\mathcal{C}'$ es mayor que el diámetro de $\mathcal{C}$.

Problema 4.1.53 Dentro de un hexágono regular $ABCDEF$ se coloca un punto G arbitrario y se trazan segmentos que lo unen con los vértices, formando 6 triángulos ABG , BCG , CDG , DEG , EFG , FAG los cuales se colorean en forma alternada de negro y blanco. Demuestre que el área de la región negra es igual al área blanca.

Problema 4.1.54 Sean ABC un triángulo acutángulo, M y N puntos sobre los lados AB y CA , respectivamente. Las circunferencias de diámetros BN y CM se intersectan en P y Q . Muestre que los puntos P , Q y el ortocentro H de ABC , son colineales.

Problema 4.1.55 Sea P un punto cualquiera dentro de un triángulo. Por P trace un segmento con extremos L y M sobre el perímetro del triángulo de manera que P divida al segmento LM a la mitad.

Problema 4.1.56 Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las rectas BD y AC se cortan en el punto P . Si O es el circuncentro del triángulo APB y H es el ortocentro del triángulo CPD , demuestre que O , P y H están alineados.

Problema 4.1.57 Sea ABC un triángulo. Sean D , E y F puntos sobre BC , CA y AB tales que $CD = 2DB$, $CE = 2EA$ y $AF = 2FB$. Sean I el punto de intersección de BE con CF y M el punto medio de AB . Pruebe que M , I y D son colineales.

Problema 4.1.58 En una circunferencia está inscrito el triángulo isósceles ABC ($AB = AC$). En el arco AB tome al azar el punto K y únalo por

medio de cuerdas con los vértices del triángulo. Muestre que $BK \cdot KC = AB^2 - KA^2$.

Problema 4.1.59 Sea ABC un triángulo con ángulo en A de 60° . Sean BM y CN las bisectrices internas de los ángulos en B y C . Muestre que $BC = BN + CM$.

Problema 4.1.60 Sea ABC un triángulo con incentro I . Sean L , M y N las intersecciones de las rectas AI , BI , y CI con BC , AC y AB , respectivamente. Suponga que los cuadriláteros $AMIN$, $BNIL$ y $CMIL$ tienen áreas iguales. Pruebe que el triángulo ABC es equilátero.

Problema 4.1.61 Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D , E y F los pies de las alturas por A , B y C , respectivamente. Si P , Q y R son los ortocentros de los triángulos AFE , BDF y CED respectivamente, pruebe que el ortocentro del triángulo PQR es el circuncentro de ABC .

Problema 4.1.62 Por el centroide de un triángulo equilátero trace una recta. Muestre que la suma de los cuadrados de las distancias desde los vértices del triángulo hasta la recta no depende de como se elige la recta.

Problema 4.1.63 Una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio R es tangente a una recta $\mathcal{L}$ en un punto C . Otra circunferencia $\mathcal{C}'$ de radio $r < R$ es tangente a $\mathcal{L}$ en un punto B e intersecta a $\mathcal{C}$ en los puntos A y A' , siendo A el más cercano a $\mathcal{L}$. ¿Qué lugar geométrico describen los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC cuando la circunferencia $\mathcal{C}'$ rueda sobre la recta $\mathcal{L}$?

Problema 4.1.64 (3ª OMM) Considere un triángulo ABC en el que la longitud de BC es 5, las medianas por B y por C son perpendiculares entre sí y el área del triángulo es 18. Encuentre las longitudes de los lados CA y AB .

Problema 4.1.65 (3ª OMM) Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos tangentes de radio 1 dentro de un círculo $\mathcal{C}$ de radio 2. Sea $\mathcal{C}_3$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a cada uno de los círculos $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Sea $\mathcal{C}_4$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$. Muestre que los centros de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ son los vértices de un rectángulo.

Problema 4.1.66 (4ª OMM) Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C . Sea l cualquier recta que pase por B y que corte al lado AC en un punto E . Sea F el punto medio de EC , G el punto medio de CB y H el pie de la altura de C a AB en el triángulo ABC .

Si I denota el circuncentro del triángulo AEH (punto de intersección de las mediatrices de los lados). Muestre que los triángulos IGF y ABC son semejantes.

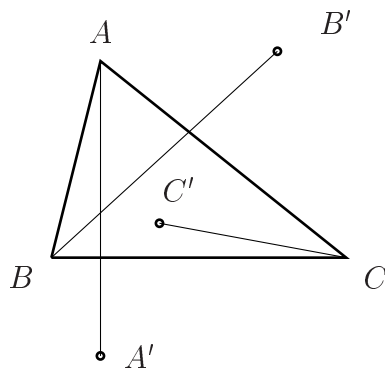
Problema 4.1.67 (5ª OMM) Se tienen cuatro canicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras tres. ¿Cuál es el radio de la esfera más pequeña que contiene a las canicas?

Problema 4.1.68 (9ª OMM) Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular; sean AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB . Sea N la intersección de AC y BD . Demuestre que los puntos L, M y N son colineales.

Problema 4.1.69 (10ª OMM) Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean P y Q los puntos de trisección de la diagonal BD (es decir, P y Q son los puntos del segmento BD para los cuales las longitudes BP, PQ y QD son todas iguales). Sea E la intersección de la recta que pasa por A y P con el segmento BC y sea F la intersección de la recta que pasa por A y Q con el segmento DC . Demuestre que:

- (a) Si $ABCD$ es paralelogramo, entonces E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD .
- (b) Si E y F son los puntos medios de BC y CD , respectivamente, entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 4.1.70 (10ª OMM) En la figura se muestra un triángulo acutángulo ABC en el que la longitud de AB es menor que la de BC y la longitud de BC es menor que la de AC . Los puntos A', B' y C' son tales que AA' es perpendicular a BC y la longitud de AA' es igual a la de BC ; BB' es perpendicular a AC y la longitud de BB' es igual a la de AC ; CC' es perpendicular a AB y la longitud de CC' es igual a la de AB . Además el $\angle AC'B = 90^\circ$.



Demuestre que A' , B' y C' están alineados.

Problema 4.1.71 (11ª OMM) En un triángulo ABC sean P y P' sobre el segmento BC , Q sobre el segmento CA y R sobre el segmento AB , de tal forma que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}.$$

Sea G el centroide del triángulo ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ . Demuestre que los puntos P, G y K son colineales.

Problema 4.1.72 (11ª OMM) Sean P, Q y R puntos sobre los lados de un triángulo ABC con P en el segmento BC , Q en el segmento AC y R en el segmento BA , de tal manera que si A' es la intersección de BQ con CR , B' es la intersección de AP con CR , y C' es la intersección de AP con BQ , entonces $AB' = B'C'$, $BC' = C'A'$ y $CA' = A'B'$. Calcule el cociente del área del triángulo PQR entre el área del triángulo ABC .

Problema 4.1.73 (12ª OMM) Dos rayos l y m parten de un mismo punto, formando un ángulo α , y sea P un punto en l . Para cada circunferencia $\mathcal{C}$ tangente a l en P que corte a m en puntos Q y R , sea T el punto donde la bisectriz del ángulo QPR corta a $\mathcal{C}$. Describe la figura geométrica que forman los puntos T , justifica tu respuesta.

Problema 4.1.74 (12ª OMM) Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A . Sea Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J . Demuestre que PJ es paralelo a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.

Problema 4.1.75 (13ª OMM) Considere P un punto en el interior del triángulo ABC . Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP , respectivamente, y L, M y N los puntos de intersección de BF con CE , AF con CD y AE con BD . Muestre que:

- (a) El área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC .
- (b) los segmentos DL, EM y FN concurren.

Problema 4.1.76 (13ª OMM) $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD . Las bisectrices exteriores de los ángulos en B y en C se intersectan en P . Las bisectrices exteriores de los ángulos en A y en D se intersectan en Q . Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro del trapecio $ABCD$.

Problema 4.1.77 (14ª OMM) Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ circunferencias tales que $\mathcal{A}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{B}$ en P , $\mathcal{B}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{C}$ en Q , $\mathcal{C}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{D}$ en R y $\mathcal{D}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{A}$ en S . Suponga además que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ no se intersectan, ni tampoco $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

- (a) Pruebe que los puntos P, Q, R y S están todos sobre una circunferencia.
- (b) Suponga además que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ tienen radio 2, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ tienen radio 3 y la distancia entre los centros de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es 6. Determine el área del cuadrilátero $PQRS$.

Problema 4.1.78 (14ª OMM) Sea ABC un triángulo con el ángulo en B mayor que 90° y un punto H sobre AC con la propiedad de que $AH = BH$, y BH es perpendicular a BC . Sean D y E los puntos medios de AB y BC , respectivamente. Por H trace una paralela a AB que corte a DE en F . Pruebe que $\angle BCF = \angle ACD$.

Problema 4.1.79 (15ª OMM) En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, llame P al punto de intersección de las diagonales AC y BD , y sea M el punto medio de CD . La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R , respectivamente. Tome un punto S sobre el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S trace una paralela a AB que corte a AC en un punto T . Pruebe que $AT = RC$.

Problema 4.1.80 (15ª OMM) Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo BAC sea el doble del ángulo BCA . Sobre el lado AC tome un

punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B trace una recta l paralela a AC . La bisectriz exterior del ángulo en A intersecta a l en el punto M , y la paralela a AB por el punto C intersecta a l en el punto N . Pruebe que $MD = ND$.

4.2 Sugerencias a los problemas

En esta parte damos sugerencias para resolver los problemas de la sección anterior.

Sugerencia 4.2.1 Trace paralelas a los lados AB y BC que pasen por L y E , respectivamente. Se forman dos triángulos rectángulos, muestre que éstos son congruentes.

Sugerencia 4.2.2 Interprete que quiere decir que O se encuentre sobre la bisectriz CI .

Sugerencia 4.2.3 Utilice el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360° . Note también que el cuadrilátero tiene dos lados paralelos.

Sugerencia 4.2.4 Observe que AK y BD son medianas del triángulo ABC . Utilice el teorema de Pitágoras y su inverso.

Sugerencia 4.2.5 Observe que los triángulos ABC y DCB son congruentes.

Sugerencia 4.2.6 Los puntos medios de las alturas están sobre los lados del triángulo medial.

Sugerencia 4.2.7 Para la primera parte use que para triángulos con la misma altura, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases. Para la segunda, compare los perímetros de dos triángulos que se oponen por el punto común de las diagonales. Use para la comparación el reflejado de uno con respecto al punto común de las diagonales.

Sugerencia 4.2.8 El segmento AB es paralelo a CE si y sólo si $(ABC) = (ABE)$.

Sugerencia 4.2.9 Las cuerdas de una longitud fija, son equidistantes al centro.

Sugerencia 4.2.10 Compare con el punto de intersección de las diagonales.

Sugerencia 4.2.11 Trabaje con el triángulo ABO para ver que CC' es altura, luego tendrá que BM es también altura.

Sugerencia 4.2.12 Vea primero que el triángulo ABC es isósceles con $AB = CA$ y que F es punto medio de AB .

Sugerencia 4.2.13 Las rectas AA' , BB' y CC' son las bisectrices de ABC . Para ver que CC' es perpendicular a $A'B'$, bastará ver que $\angle C'B'A' = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$ y $\angle CC'B = \frac{1}{2}\angle B$.

Sugerencia 4.2.14 Muestre que los triángulos CDE y FBC son congruentes y que $\angle FCE = 60^\circ$.

Sugerencia 4.2.15 Trace la paralela al segmento de recta que quiere calcular y que pasa por el pie de la altura. Use semejanza de triángulos.

Sugerencia 4.2.16 El cuadrilátero formado por los puntos medios de los lados del cuadrilátero es un paralelogramo. Utilice que las diagonales de un paralelogramo se dividen en partes iguales.

Sugerencia 4.2.17 Sean $m = AM$, P el pie de la perpendicular de I sobre AM y $p = PI$. Comparando las áreas de los triángulos ABM y ABC se deduce que $2p = r$.

Sugerencia 4.2.18 Considere la altura desde un vértice y la perpendicular de un lado al punto P . Compare las áreas de los triángulos que se forman. Repita el proceso para los otros dos vértices.

Sugerencia 4.2.19 Trabaje mejor con $\frac{AX}{PX}$. Utilice el hecho de que para un triángulo con la misma base, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus alturas.

Sugerencia 4.2.20 La potencia de M respecto al incírculo es $MX^2 = ML \cdot MY$. Calcule esta potencia de otra manera usando que los triángulos YMC y CML son semejantes.

Sugerencia 4.2.21 En un cuadrilátero cíclico la suma de los ángulos opuestos es 180° .

Sugerencia 4.2.22 Muestre que $\angle MDB = \angle CAB$ y $\angle MCB = \angle DAB$.

Sugerencia 4.2.23 El cuadrilátero $AQPB$ es cíclico y el triángulo AOC es isósceles.

Sugerencia 4.2.24 Utilice la fórmula de Herón (teorema 2.6.1) para calcular el área de un triángulo.

Sugerencia 4.2.25 Utilice la fórmula de Herón (teorema 2.6.1) para calcular el área de un triángulo.

Sugerencia 4.2.26 El conjunto de puntos R , donde PQR es triángulo rectángulo es la circunferencia de diámetro PQ .

Sugerencia 4.2.27 Puede tomar varios caminos, por ejemplo: utilice la ley de los cosenos o la ley de los senos o trabaje con áreas o bien use el teorema de Ptolomeo.

Sugerencia 4.2.28 Las diagonales dividen al cuadrilátero en triángulos, utilice la desigualdad del triángulo.

Sugerencia 4.2.29 Para demostrar la segunda desigualdad utilice la desigualdad del triángulo, para ver que $AC < AB + BC$. Haga lo mismo con las otras diagonales. Para demostrar la primera desigualdad, llame R a la intersección de las diagonales BD y CE . La desigualdad del triángulo le dará $CD < CR + RD$, para los otros lados trabaje igual.

Sugerencia 4.2.30 Trace la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y prolongue la bisectriz hasta cortar la circunferencia en E , utilice el hecho que los triángulos ABD y AEC son semejantes.

Sugerencia 4.2.31 Utilice el teorema de la bisectriz (teorema 2.2.5) y la semejanza de los triángulos ABN y QBC .

Sugerencia 4.2.32 Utilice la semejanza de los triángulos ALN y ACL , lo mismo que la de los triángulos ALM y ABL , ADM y ANL .

Sugerencia 4.2.33 Considere G el pie de la perpendicular de B a AC . Vea que las parejas de triángulos rectángulos: AEC y AGB , AFC y CGB son semejantes.

Sugerencia 4.2.34 Las igualdades de los ángulos es equivalente a ver que $BLGN$ es cíclico, donde G es el centroide.

Sugerencia 4.2.35 Los triángulos ABC y PBR son congruentes y de lados paralelos. Además, BQ y PR son perpendiculares.

Sugerencia 4.2.36 Como los triángulos BMN y BMC tienen la misma base, bastará ver que NC es paralela a BM . Use que $ABLM$ y $ABNC$ son cíclicos para ver que $\angle AMB = \angle ACN$.

Sugerencia 4.2.37 Sea M el punto medio del segmento BC y E la intersección de AI con BC . Note que IG es paralela a BC si y sólo si $\frac{AI}{IE} = \frac{AG}{GM} = 2$. Use el teorema de la bisectriz (teorema 2.2.5) para ver que $\frac{AI}{IE} = \frac{AB}{BE}$ y que $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

Sugerencia 4.2.38 Muestre que los triángulos AEF y ACD son semejantes. Utilice que los triángulos ABC y AFB son semejantes, lo mismo que los triángulos ABD y AEB .

Sugerencia 4.2.39 Construya un triángulo equilátero ABD sobre el lado AB , los puntos O del circuncírculo que no están en el arco AB donde se encuentra D cumplen que el ángulo $AOB = 120^\circ$.

Sugerencia 4.2.40 Observe que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles. Demuestre que $AD + BC = AB + DC$.

Para encontrar el radio del círculo inscrito, utilice el hecho de que los triángulos O_1DE y O_2CF son semejantes, donde O_1 y O_2 son los centros de los círculos de radio r y R , respectivamente, E y F la intersección de AD y BC con la recta que une los centros.

Sugerencia 4.2.41 Por la desigualdad del triángulo $x = b+c-a$, $y = a+c-b$ y $z = a+b-c$ son números positivos. Utilice la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

Sugerencia 4.2.42 Considere S y T las intersecciones del segmento OA con la circunferencia y con DP respectivamente. Los triángulos rectángulos

ASB y APT son semejantes, esto le ayudará a mostrar que los triángulos APD y ACD son congruentes.

Sugerencia 4.2.43 Si K , L y M son puntos medios del triángulo entonces el triángulo ABC queda dividido en cuatro triángulos con la misma área. Considere el triángulo formado cuando K , L y M no son puntos medios y compare el área con el área del triángulo formado por los puntos medios.

Sugerencia 4.2.44 Considere H el punto de intersección de las alturas. Divida los triángulos EFB y CEF en dos triángulos cada uno y observe que tienen una parte en común. Luego los dos triángulos que le quedan tienen que tener la misma relación entre sus áreas que los triángulos originales. Análogamente para los triángulos FBC y BCE . Observe también que el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico. Esta última observación lo conducirá al resultado.

Sugerencia 4.2.45 Sean P y P' los centros de los circuncírculos de AOB y MNC . Considere los triángulos PMN y $P'MN$ demuestre que son congruentes.

Sugerencia 4.2.46 El valor del $\angle BNC$ es fijo, luego se tiene un lugar geométrico para el punto N .

Sugerencia 4.2.47 El hexágono se inscribe en un triángulo equilátero.

Sugerencia 4.2.48 Trace por A una paralela a BC , por C una paralela a DE y por E una paralela a FA , estas paralelas dividen al hexágono en tres paralelogramos y un triángulo.

Sugerencia 4.2.49 Trace por A una paralela a BC , por C una paralela a DE y por E una paralela a FA , estas paralelas dividen al hexágono en tres paralelogramos y un triángulo. Utilice los problemas 47 y 48.

Sugerencia 4.2.50 Trace por A una paralela a BC , por C una paralela a DE y por E una paralela a FA , estas paralelas dividen al hexágono en tres paralelogramos y un triángulo. Trace ahora por B una paralela a CD , por D una paralela a EF y por F una paralela a AB , estas paralelas dividen al hexágono en otros tres paralelogramos y otro triángulo.

Sugerencia 4.2.51 Vea que el hexágono es de lados opuestos paralelos y que las diagonales son concurrentes.

Sugerencia 4.2.52 Sea D el punto de intersección del arco $\mathcal{C}'$ con el diámetro que pasa por A . Compare el arco $\widehat{AD}$ con este diámetro.

Sugerencia 4.2.53 Sobre los lados AF y CD construya los triángulos equiláteros AFH y CDI . Vea las siguientes igualdades de áreas: $(AHG) = (BAG)$, $(CBG) = (CIG)$, $(DIG) = (EDG)$ y $(FEG) = (HFG)$.

Sugerencia 4.2.54 La recta por P y Q es el eje radical de las circunferencias de diámetros BN y CM .

Sugerencia 4.2.55 Refleje los vértices del triángulo respecto al punto P . Construya con estos puntos un nuevo triángulo. Los puntos de intersección de los dos triángulos son buenos candidatos a ser los extremos del segmento que busca.

Sugerencia 4.2.56 Considere a Q la intersección del segmento OP con CD . Demuestre que PQ es perpendicular a CD .

Sugerencia 4.2.57 Considere un punto F' sobre AB tal que $BF = FF' = F'A$, N el punto de intersección de ED con FC , Q el punto de intersección de $F'C$ con DE y M' el punto de intersección de DI con AB . Muestre que $M' = M$. Los puntos construidos le ayudarán a encontrar varios triángulos semejantes, así como las razones de semejanza.

Sugerencia 4.2.58 Construya el triángulo isósceles KAL , donde L se encuentra sobre la recta BK de manera que $AL = AK$. Muestre primero que $AB^2 - KA^2 = BK \cdot BL$. Para ver que $BL = KC$, muestre que los triángulos LAB y KAC son congruentes.

Sugerencia 4.2.59 Considere N' sobre BC con $BN' = BN$. Busque demostrar que los triángulos $CN'I$ y CMI son congruentes, ayuda el que los triángulos $BN'I$ y BNI son congruentes.

Sugerencia 4.2.60 Muestre que el único punto I para el cual se cumple que $AMIN$, $BNIL$ y $CMIL$ tengan la misma área es el centroide.

Sugerencia 4.2.61 Muestre que AP , BQ y CR son las alturas del triángulo PQR y que concurren en O el circuncentro del triángulo ABC . Muestre que AP es perpendicular a QR observando que QR es paralela a EF . Para demostrar esta última afirmación basta mostrar que $EFQR$ es un paralelogramo.

Sugerencia 4.2.62 Trace las perpendiculares a la recta desde cada uno de los vértices del triángulo, estos segmentos representan la distancia de cada uno de los vértices a la recta. Calcule estas distancias.

Sugerencia 4.2.63 Considere una circunferencia circunscrita al triángulo ABC , muestre que su radio es $\sqrt{rR}$. De aquí concluya que todo punto sobre el lugar geométrico pertenece a la semicircunferencia que tiene centro C , radio $\sqrt{Rr}$ y que está del lado opuesto a C' con respecto a $\mathcal{L}$ (sin incluir los extremos).

Sugerencia 4.2.64 Sean M y N los puntos medios de AC y AB , respectivamente. Sea G la intersección de BM y CN . Exprese las áreas de los triángulos BCG , CGM , GMN , NMA y BGN en términos de BG y CG .

Sugerencia 4.2.65 Sean O , O_1 , O_2 , O_3 y O_4 los centros de las circunferencias $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$, respectivamente. Usando el triángulo rectángulo OO_1O_3 , determine el radio de $\mathcal{C}_3$. Entonces ya sabe donde está el cuarto vértice P del rectángulo OO_1O_3P . Calculando distancias, pruebe que P es el centro de $\mathcal{C}_4$.

Sugerencia 4.2.66 Considere el punto de intersección de los dos semicírculos con centros F y G y radios FC y GC , llame a este punto O . Observe que B , O , E son colineales y que $\angle HOB = \angle HCB = \angle BAC$. El incentro I del triángulo AEH es también la intersección de las mediatrices de EO y OH que pasan a su vez por F y G , respectivamente. Tenemos que FI y GI son perpendiculares a EO y OH , luego el $\angle FIG = \angle BAC$. Por último, muestre que $\angle IFG = 90^\circ$. Luego se tiene que los triángulos IGF y ABC tienen dos ángulos iguales, por lo tanto son semejantes.

Sugerencia 4.2.67 Considere el tetraedro T determinado por los centros de las cuatro esferas. Entonces T es un tetraedro regular cuyas aristas miden 2 y el radio buscado es igual a $d + 1$, donde d es la distancia del centro C de T a uno de sus vértices. Determine cuánto mide la altura h de T . Para saber en que proporción corta C a h , tome una cara del tetraedro y construya el tetraedro T_1 determinado por esa cara y por C . ¿Cuál es la proporción entre el volumen de T y el de T_1 .

Sugerencia 4.2.68 Muestre primero que ACD y DCN son triángulos semejantes y debido a que $CD = CL$ se tiene que $CL^2 = AC \cdot NC$. De aquí se

puede concluir que los triángulos ACL y LCN son semejantes, podrá ahora mostrar que LN es perpendicular a AC . Algo análogo se puede hacer para ver que MN es también perpendicular a AC .

Sugerencia 4.2.69 Para el inciso (a) muestre que P y Q son centroides de los triángulos ABC y ACD , respectivamente. Para la segunda parte, si $ABCD$ no es paralelogramo, considere un punto C' de tal manera que $ABC'D$ sea paralelogramo.

Sugerencia 4.2.70 Primero vea que los triángulos ABB' y $C'CA$ son congruentes, al igual que BCC' y $A'AB$. Muestre que $A'BC'$ y $C'AB'$ son triángulos rectángulos isósceles.

Sugerencia 4.2.71 Muestre que K es punto medio de AP' , por ejemplo mostrando que $ARP'Q$ es paralelogramo. Si M es punto medio de BC , vea que M también es punto medio de PP' .

Sugerencia 4.2.72 Primero vea que los triángulos ABB' , $AB'A'$, $AA'C$, $BB'C'$, $BC'C$, $CA'C'$, CAA' y $A'B'C'$ tienen la misma área. Muestre después que $RB' = \frac{1}{3}B'A'$ y en consecuencia $(RB'C') = (A'B'C')$.

Sugerencia 4.2.73 Observe que los puntos T se encuentran en un rayo que parte de P y que forma con l un ángulo constante e igual a $\frac{\pi-\alpha}{2}$.

Sugerencia 4.2.74 Muestre que $JPQC$ es un cuadrilátero cíclico. La condición $BC^2 = AC \cdot QC$ es equivalente a la semejanza de los triángulos ABC y BQC y equivalente a que $JPQC$ es un trapecio isósceles.

Sugerencia 4.2.75 Muestre que N es el centroide del triángulo ABP , use esto para concluir que $(PDNE) = \frac{1}{3}(ABP)$. Para la segunda parte muestre que los triángulos QDE y QLM son semejantes y en razón 3:2, donde Q es el punto de intersección de DL y EM . De manera análoga se puede ver que FN y DL se cortan en razón 3:2.

Sugerencia 4.2.76 Sean C' y D' las intersecciones de AB con CP y DQ , respectivamente. Muestre que BCP y $BC'P$ son triángulos rectángulos congruentes, esto ayuda para ver que PQ es paralela a AB y equidistante a AB y CD .

Sugerencia 4.2.77 Sean A , B , C y D los centros de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente. Use que el punto de tangencia de dos circunferencias es colineal

con los centros de las circunferencias. Utilice que el ángulo seminscrito es la mitad del ángulo central que abre el mismo arco. Para la segunda parte bastará usar el teorema de Pitágoras y observar que $PQRS$ es un rectángulo.

Sugerencia 4.2.78 Observe que los ángulos BAH , ABH , BHF , FHC , HFD y FDB son iguales. Deduzca de esto último que $HDBF$ es cíclico. Vea ahora que DB y HF son paralelos, y $\angle FBE = \angle DBH$. Considere G la intersección de BF con AC . Muestre que los triángulos ABC y BGC son semejantes, además CF es mediana de BGC .

Sugerencia 4.2.79 Considere la potencia del punto P respecto al círculo grande y la potencia de D respecto al círculo pequeño. Utilice el teorema de Thales (teorema 1.4.3).

Sugerencia 4.2.80 Observe que el triángulo AMB es isósceles, esto le permitirá concluir que $MBCD$ es un paralelogramo. Por otra parte se sabe que $ABNC$ es un paralelogramo de donde se puede ver que DCN es isósceles. Finalmente observe que los ángulos BND y DMB son iguales de modo que el triángulo MDN es también isósceles y por tanto se tiene que $MD = DN$.

Bibliografía

- [1] Altshiller, N. *College geometry*. Barnes and Noble, 1925.
- [2] Coxeter, H., Greitzer, S. *Geometry revisited*. New Math. Library, MAA, 1967.
- [3] Dorrie, H. *100 Great problems of elementary mathematics*. Dover, 1965.
- [4] Engel, A. *Problem-solving strategies*. Springer-Verlag, 1998.
- [5] Eves, H. *Estudio de las Geometrías*. UTHEA, 1985.
- [6] Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I. *Mathematical circles*. Mathematical World, Vol. 7. American Mathematical Society, 1996.
- [7] Gusiev, V., Litvinenko, V., Mordkovich, A. *Prácticas para resolver problemas de matemáticas. Geometría*. Editorial Mir, 1989.
- [8] Hadamard, J. *Leçons de géométrie*. Jacques Gabay, 1988.
- [9] Hadwiger, H., Debrunner, H. *Combinatorial geometry in the plane*. Holt, Rinehart and Wiston, 1964.
- [10] Honsberger, R. *Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry*. New Math. Library, MAA, 1995.
- [11] Illanes, A. *Principios de Olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2001.
- [12] Johnson, R. *Advanced euclidean geometry*. Dover, 1960.
- [13] Lalesco, T. *La géométrie du triangle*. Jacques Gabay, 1987.
- [14] Larson, L. *Problem-solving through problems*. Springer-Verlag, 1990.

- [15] Shariguin, I. *Problemas de geometría*. Editorial Mir, 1989.
- [16] Shively, L. *Introducción a la geometría moderna*. CECSA, 1977.
- [17] Soulami, T. *Les olympiades de mathématiques*. Ellipses, 1999.
- [18] Vasiliev, V., Gutemájer, I. *Rectas y curvas*. Editorial Mir, 1988.

Indice

- Altura, 33, 85
 - longitud de la, 13
 - pie de la, 13
- Angulo, 2
 - adyacente, 2
 - agudo, 3
 - bisectriz del, 3
 - central, 35
 - complementario, 3
 - exterior, 4, 5
 - inscrito, 35
 - interior, 4, 5
 - lados del, 2
 - obtuso, 3
 - positivo, 89
 - recto, 3
 - semi-inscrito, 39
 - suplementario, 3
- Angulos
 - alternos externos, 4
 - alternos internos, 4
 - correspondientes, 4
 - opuestos, 3
- Area
 - negativa, 133
 - positiva, 133
- Bisectriz, 30
 - externa, 74
 - interna, 30, 74
- Círculo
 - circunscrito, 41
- Cónica, 54
- Centro de Perspectiva, 78
- Chasles
 - relación de, 72
- Circunferencia, 5
 - ángulo entre dos, 128
 - centro de la, 5
 - cuerda de una, 34
 - de Apolonio, 55, 117
 - de inversión, 124
 - de los nueve puntos, 68
 - ortogonal, 126
 - radio de la, 5
 - secante de una, 34
 - tangente a una, 34
- Circunferencias
 - tangentes, 128
- Circunradio, 33
- Compás, 44
- congruencia
 - ALA, 6
 - LAL, 6
 - LLL, 6
- Conjugados armónicos, 125
- Coseno, 90
- Cuadrado, 43
- Cuadrilátero, 5, 41
 - anticentro del, 150

- centroide de un, 135
- circunscrito, 147
- convexo, 41, 133
- cruzado, 41, 133
- entrante, 41, 133
- Cuadrilátero convexo
 - área, 133
- Curvas
 - ángulo entre dos, 128
- Desigualdad
 - de Euler, 101
 - de Nesbitt, 100
 - del triángulo del, 8
- Diagonal, 5
- Distancia
 - de punto a recta, 4
 - entre dos puntos, 4
- Eje radical, 121
- Elipse, 55
- Excírculo, 87
- Excentricidad, 55
- Excentro, 87
- Exradio, 87
- Fórmula
 - de Euler, 101, 122, 123
 - de Herón, 97
- Figuras
 - homotéticas, 107
 - similares, 116
- Figuras en Perspectiva
 - desde un Punto, 78
 - desde una recta, 79
- Hexágono, 5
- Hipérbola, 55
- Homotecia, 107
- centro de, 107
- razón, 107
- Incentro, 84
- Inradio, 31
- Inversión, 124
- Línea
 - quebrada, 5
 - recta, 1
- Lados
 - adyacentes, 41
 - opuestos, 41
- Ley
 - de los cosenos, 93
 - de los senos, 94
- Lugar geométrico, 44
- Media
 - aritmética, 27
 - armónica, 27
 - cuadrática, 27
 - geométrica, 27
- Mediana, 29, 81
 - longitud de la, 83
- Mediatriz, 32
- n-ágono, 5
- Ortocentro, 34, 84
- Ortodiagonal, 148
- Parábola, 55
- Paralelogramo, 43
 - Ley del, 43
- Pentágono, 5
- Polígono, 5
 - cíclico, 41
 - diagonales, 41
 - inscrita, 40

- lados del, 5
 - perímetro del, 5
 - vértices del, 5
- Potencia, 120
- Punto
 - de Gergonne, 72
 - de Nagel, 73
 - inverso, 124
- Punto de Fuga, 78
- Puntos
 - colineales, 4
 - concíclicos, 40
 - homólogos, 107
- Rayo, 2
- Rectángulo, 43
- Recta
 - de Euler, 66
 - de reflexión, 114
 - de Simson, 138
- Rectas
 - cevianas, 70
 - paralelas, 4
 - perpendiculares, 3
 - transversales, 4
- Reflexión, 114
- Regla, 44
- Rombo, 43
- Rotación, 114
 - ángulo de, 114
 - Centro de, 114
- Segmento, 2
 - dirigido, 4, 72
 - mediatriz de un, 32
- Semejanza
 - AA, 19
 - AAA, 18
 - LAL, 19
 - LLL, 18, 20
- Seno, 90
- Similitud, 116
 - centro de, 116
 - circunferencia de, 116
 - razón de, 116
- Tangente, 90
- Teorema
 - Brahmagupta, 144, 148
 - Ceva, 70
 - Chasles, 139
 - de la bisectriz, 74, 95
 - Desargues, 78
 - Extendido de Ptolomeo, 139
 - medida del ángulo inscrito, 35
 - medida del ángulo semi-inscrito, 39
 - Menelao, 73
 - Pappus, 76
 - Pitágoras, 22
 - recíproco del, 25
 - Ptolomeo, 136, 139
 - Simson, 137, 139
 - Stewart, 96
 - Thales
 - primer teorema, 15
 - segundo teorema, 17
 - Varignon, 134
- Transformación
 - de Ravi, 102
- Transformaciones
 - geométricas, 114
 - isometrías, 114
- Trapezio, 43
 - bases de un, 43
 - isósceles, 43

- Traslación, 114
- Triángulo, 4, 5
 - ángulo externo, 9
 - área, 13
 - órtico, 83
 - acutángulo, 5
 - altura de un, 33
 - altura del, 13
 - baricentro del, 30
 - bisectriz de un, 31
 - catetos del, 22
 - centro de gravedad del, 30
 - centroide del, 30
 - circuncírculo, 33
 - circuncentro, 33
 - desigualdad del, 10
 - equilátero, 6
 - escaleno, 6
 - gravicentro del, 30
 - hipotenusa de un, 22
 - incírculo, 32
 - incentro, 31
 - isósceles, 6
 - medial, 66
 - medianas del, 29
 - mediatrices de un, 32
 - obtusángulo, 6
 - ortocentro del, 34
 - rectángulo, 5
 - suma de ángulos, 8
- Triángulos
 - congruentes, 6
 - semejantes, 18
- Vértices, 5
 - adyacentes, 41
 - opuestos, 41